CONTINGUTS PER LES PROVES EXTRAORDINÀRIES

MATÈRIA	Matemàtiques (Ciències i Tecnologia)	CURS
ALUMNE		1r BTL

Com a material de suport es lliura una sèrie d'exercicis amb les solucions. La col·lecció és extensa, i és una orientació i un material que us ha d'ajudar durant l'estudi. A més teniu tots els exercicis que es van realitzar durant el curs i que constitueixen el principal referent alhora de repassar els continguts.

Cal entregar un dossier amb els exercicis que l'alumne hagi realitzat per tal d'obtenir un nivell adequat d'acord amb el que s'ha fet durant el curs. No es tracta de fer tots els exercicis en absolut, ja que en són molts. Es tracta de treballar i entregar una col·lecció d'exercicis amb un diari reflexiu en què expliquin què han fet i què han après en cada un dels temes. No hi ha un número mínim d'exercicis i no es valorarà més el fet d'haver entregat molts exercicis realitzats.

Primera avaluació

1. Nombres Reals
   - Nombres reals (naturals, enters, 0, racionals, irracionals)
   - Operacions amb nombres reals. Propietats.
   - Les arrels i les potències.
   - Operacions amb arrels.
   - Racionalització de denominadors.
2. Polinomis
   - Operacions amb polinomis
   - Divisió de polinomis: Ruffini
   - Teorema del residu
   - Divisibilitat de polinomis
   - Arrels de polinomis
   - Factorització de polinomis
   - Fraccions algebraiques. Operacions.
3. Números complexos
   - Definició, forma binòmica.
   - Operacions amb números complexos. Producte, divisió, potència.
   - Arrels de números complexos.
   - Oposat i invers.
4. Trigonometria
   - Raons trigonomètriques d'un angle.
   - Circumferència trigonomètrica (unitat o goniomètrica)

- Reducció al primer quadrant.
- Relacions entre les raons trigonomètriques d'un angle qualssevol.
- Angle Suma i Angle Diferència
- Angle Doble i Angle Meitat.
- Transformació de sumes en productes.
- Determinació de triangles
- Teorema del cosinus
- Teorema del sinus
- Resolució de problemes.
- Identitats i equacions trigonomètriques.

<u>Segona avaluació</u>

5. Vectors
    - Components cartesians d'un vector
    - Vectors equipolents
    - Operacions amb vectors. Propietats.
    - Combinació lineal de vectors. Dependència i independència lineal.
    - Bases del pla. Canvis de base.
    - Producte escalar de dos vectors.
    - Aplicacions geomètriques dels vectors: punt mitjà d'un segment, divisió d'un segment segons una raó donada, baricentre d'un triangle.
6. Rectes en el pla
    - Diferents formes d'expressió d'una recta: equació vectorial, equacions paramètriques, equació continua, equació general o implícita, equació explicita, equació canònica.
    - Determinació de rectes:
      - recta determinada per dos punts
      - recta determinada per un punt i el seu pendent.
    - Incidència i Paral·lelisme
    - Perpendicularitat de rectes.
      - Projecció ortogonal d'un punt sobre una recta.
      - Punt simètric respecte d'una recta.
    - Angle de dues rectes.
    - Distàncies
      -distància entre dos punts
      -distància d'un punt a una recta.
      -distància entre dues rectes
      -Bisectriu dels angles que formen dues rectes.

<u>Tercera avaluació</u>

7. Funcions
    - Concepte de funció
    - Domini i Recorregut.
    - Funcions algebraiques (polinòmiques, racionals).
    - Funcions logarítmiques, exponencials i trigonomètriques.
    - Operacions amb funcions: funció suma, funció resta, funció producte, funció quocient.
    - Funció composta

- Funció inversa
- Problemes de funcions.

8. Límits i continuïtat de funcions
   - Límit d’una funció en un punt
   - Límit d’una funció a l’infinit
   - Càlcul d’indeterminacions: ∞/∞ 0/0
   - Límits laterals
   - Estudi de la continuïtat d’una funció.
9. Introducció a les derivades
   - Concepte de derivada
   - Càlcul de derivades. Regla de la cadena
   - Derivades successives
   - Rectes tangents
   - Estudi de monotonia i punts extrems
   - Estudi de funcions

1 P

POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. Haz las siguientes divisiones:
   a) $(3x^2 - 5x^3 - 1 + x^4 - 4x) : (3 - 4x + x^2)$
   b) $(4x^2 - 19x + 4x^3) : (-3 + 2x)$
   c) $(2x^5 - 3) : (2x^2 - 4)$

2. Utilizando Ruffini, hallar el cociente y el resto de las divisiones:
   a) $(x^3 - x^2 + 11x - 10) : (x - 2)$
   b) $(8x^3 - 3x + x^4 + 20 + 12x^2) : (x + 3)$
   c) $(x^5 - 32) : (x + 2)$

3. Calcular el resto de las divisiones empleando el teorema del resto:
   a) $(x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 7) : (x + 1)$
   b) $\left(\frac{x^4}{9} + \frac{5x}{6} - x^2\right) : (x - 3)$
   c) $(x^6 + 1) : (x + 2)$

4. Averiguar el resto de las divisiones. Si son exactas calcular también el cociente y poner el dividendo como producto de dos factores:
   a) $(3x^4 + 5x^3 - x - 8) : (x + 2)$
   b) $(5x - 3x^3 + 8x^2 - 6) : (x - 3)$

5. Hallar p para que sea exacta la división: $(x^2 - 2x + p) : (x - 3)$

6. ¿Qué valor ha de tomar m para que: $x^5 - 8x^2 + mx - 6x^6 + 1$ sea divisible por $(x - 4)$?

7. Hallar K para que (-2) sea un cero del polinomio $x^2 - 3x^3 + 2Kx - 4$

8. Calcula m para que al dividir $x^3 - x^2 + mx - 3$ por $x + 2$ el resto sea -1.

9. Calcula a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 15$ sea divisible por $(x - 3)$ y por $(x - 5)$. Factoriza el polinomio resultante.

10. Descomponer factorialmnte los siguientes polinomios:
    a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
    b) $Q(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$
    c) $R(x) = x^5 - 16x$
    d) $S(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$
    e) $T(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2$

11. Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes grupos de polinomios.
    a) $j\,x^3 - 1$; $x^2 - x$; $x^2 - 1$
    b) $x^4 - 16$; $x^2 - 4$
    c) $5x - 10$; $15x^2 - 60$; $3x^2 - 12x + 12$

12. Determinar a y b para que $(x-3)$ sea una raiz doble del polinomio x^3+ax^2+7x+b. Factoriza el polinomio resultante.

13. Descomponer las siguientes expresiones en fracciones simples.

a) $\dfrac{5x+4}{x^2+x-2}$

b) $\dfrac{-x-5}{x^2-2x-3}$

c) $\dfrac{4x^2-3}{x^3-2x^2+x-2}$

14. Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{4}{x^2+2x+1}-\dfrac{x+3}{x^2-x}$

b) $\dfrac{x-2}{x^2+2x-3}+\dfrac{2x}{x+3}-\dfrac{4}{x^2-1}$

c) $\dfrac{x-2}{x+3}\div\dfrac{x^2-2x}{x^2+6x+9}$

d) $\left(\dfrac{4x}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$

e) $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\div\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab-b^2}\right)$

f) $\left(\dfrac{1}{x^3+x^2+x+1}-\dfrac{2-x}{1-x^4}\right)\div\dfrac{x}{1-x^2}$

g) $\dfrac{x-x^2}{1-x^2}+\dfrac{1+x}{1+2x+x^2}-\dfrac{1-2x}{1+x}$

h) $\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\div\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$

i) $\left(\dfrac{\dfrac{a}{x}+\dfrac{x}{a}}{\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{a}}-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{a}}\right)\div\dfrac{1-\dfrac{a-3x}{a+x}}{\dfrac{3a+x}{a-x}-3}$

2P

1. Averiguar los valores reales que verifican las siguientes condiciones:

a. $|x-2| \leq 2$

b. $\left|x+\frac{1}{2}\right| = 5$

c. $|2x+3| \geq 6$

2. Expresar en forma de valor absoluto los siguientes intervalos:

a. $(-3, 5)$

b. $(-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$

3. Calcular:

a. $\sqrt[3]{16} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\frac{54}{8}}$

b. $\sqrt{\frac{2a}{b}} - \sqrt{\frac{2b}{a}} + \sqrt{\frac{1}{2ab}}$

c. $\sqrt{(x+2)^3} - \sqrt{4x+8} - \sqrt{x^3+2x^2}$

d. $\sqrt{a^2m - a^2n} + \sqrt[4]{(m-n)^2 \cdot b^4} + \sqrt[6]{c^6 \cdot (m-n)^3}$

e. $\frac{b}{0,3}\sqrt{\frac{0,18a}{b^2}} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{18b^2}{a}} + 2c\sqrt{\frac{2a}{c^2}} - \frac{2}{9c^2}\sqrt{\frac{a^3 \cdot c^4}{0,125}}$

4. Calcular:

a. $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt{\sqrt[3]{4}}$

b. $3\sqrt{3\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{3^3}}}$

c. $\sqrt[3]{\frac{2}{b}\sqrt{\frac{b}{2}}}$

5. Racionalizar: $\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

6. Racionalizar: $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+2}$

7. Racionalizar: $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

8. Racionalizar: $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

9. Racionalizar: $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

10. Racionalizar: $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

11. Racionalizar: $\frac{11}{2\sqrt{5}+4}+\frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

12. Opera y simplifica: $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

13. Opera y simplifica: $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

14. Opera y simplifica: $\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}$

15. Racionalizar: $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

16. Racionalizar: $\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

17. Racionalizar y simplificar: $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}$

3P

NUMEROS COMPLEXOS

(Amb un * no cal fer-los)

1. Hallar "a" para que el complejo $\frac{3+2i}{a+6i}$:

a) sea real puro
b) sea imaginario puro

2. Hallar el valor de k para que el complejo $\frac{2-(1+k)i}{1-ki}$ sea un nº real. Hallar su cociente.

3. Hallar a y b para que el complejo $\frac{a+2i}{3+bi}$ sea igual $\sqrt{2}_{315}$

4. Hallar dos números complejos cuya diferencia es imaginaria, su suma tiene como parte imaginaria 5 y su producto vale $-5+5i$.

5. Hallar dos nº complejos tales que su suma sea 1 + 2i, el cociente de ambos real puro y la parte real del 1º sea igual a 2.

6. Determine un número complejo cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

* 7. Expresar en forma polar los siguientes nº complejos:

a) 2
b) -5
c) i
d) $-2+2\sqrt{3}\,i$
e) $\sqrt{3}-i$

* 8. Expresar en forma binómica los siguientes complejos:

a) $3_{180°}$
b) $6_{30°}$
c) $2_{270°}$
d) $\sqrt{2}_{45°}$

* 9. El complejo de argumento 75º y módulo 12 es el producto de dos complejos, uno de ellos tiene de argumento 45º y el otro de módulo 3. Escribir ambos en forma binómica.

* 10. Sean los complejos:

$$Z = 3_{30°}\ ;\ W = 2_{60°}\ ;\ P = 2+2i\ ;\ Q = 2-2\sqrt{3}i$$

realizar las siguientes operaciones:

a) $Z\cdot W$
b) $\overline{Z}\cdot\overline{W}^2$
c) P^2
d) Q^5
e) $\frac{Z^2\cdot\overline{P}}{Q^{-1}}$
f) $\frac{Q^3+Z^3}{W^3-P^3}$

11. Escribir $Z_1 = 2 + 2i$ y $Z_2 = 6 - 6i$ en forma polar y calcular $\frac{Z_1}{Z_2}$ en forma polar y en forma binómica.

12. Calcular $(1+i)^{20}$. Expresar la solución en forma binómica.

13. Calcular las siguientes raices

a) $\sqrt[3]{-3+3i}$
b) $\sqrt[5]{-1+\sqrt{3}i}$
c) $\sqrt[6]{64}$
d) $\sqrt[4]{-9}$
e) $\sqrt[3]{i}$
f) $\sqrt[4]{-16i}$
g) $\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i}$

14. Hallar las raíces cuadradas de:

a) 4
b) -4
c) $4i$
d) $-4i$

15. Para escribir un número complejo ¿qué argumento debes poner en los siguientes casos?

a) nº real positivo
b) nº real negativo
c) nº imaginario positivo
d) nº imaginario negativo

16. Dado un complejo en forma polar ¿Qué transformación sufre si se multiplica por i?

17. Calcula la raiz cúbica del complejo $\frac{Z_1}{Z_2}$ siendo $Z_1 = 16_{210^\circ}$ y $Z_2 = -\sqrt{3} - i$

18. Calcular en forma polar: $\left(1+\sqrt{3}\ i\right)^6 \cdot (-1+i)^7$

19. Calcular y expresar en forma binómica $\frac{-2+2\sqrt{3}i}{(-1-i)^2}$

20. Calcular: $\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$

21. Dado el número complejo $z = \frac{1+i^7}{1+i}$ calcular la expresión trigonométrica del nº $\bar{z}$.

22. Sea $z = 10\sqrt{3} - 10i$. Calcular z^5, $\sqrt[4]{z}$

23. Calcular $\sqrt[5]{\left(-\sqrt{3}-i\right)^3}$

24. Resolver la ecuación: $z^3 i + \sqrt{3} = i^{251}$

25. Dibuja los afijos de la ecuación $(z-1)\cdot(z^2 + z + 1) = 0$

26. Calcular los valores de z que verifican: $(1+i)z^3 - 2i = 0$

27. Resolver la ecuación $x^4 + 1 = i$

28. Comprobar que el número complejo $z = 1 - \sqrt{3}i$ es solución de la ecuación $z^2 - 2z + 4 = 0$. En caso afirmativo calcular la otra solución.

* 29. Encontrar las ecuaciones de 2º grado cuyas raíces son: $\sqrt{2}_{45^\circ}$, $\sqrt{2}_{315^\circ}$

TRIGONOMETRIA

1. Calcular las razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.

2. Si cos A > 0,8, siendo A un ángulo agudo, ¿cómo es sen A y tg A?

3. 0'6 < sen α < 0'8, di entre que valores están comprendidos cos α y tg α.

4. Calcular las restantes razones trigonométricas.
   a) $\text{tg}\ \alpha = 2;\ \text{sen}\ \alpha > 0$
   b) $\text{tg}\ \alpha = 3;\ \text{sen}\ \alpha < 0$
   c) $\sec \alpha = 3;\ \text{tg}\ \alpha < 0$
   d) $\text{cosec}\ \alpha = -\frac{4}{3};\ \alpha \notin (0, \pi)$
   e) $\text{sen}\ \alpha = -\frac{1}{3};\ \cos \alpha > 0$

5. Calcular las razones trigonométricas de los siguientes ángulos en función de sus ángulos asociados agudos.
   a) 135º
   b) 120º
   c) 330º
   d) 240º
   e) 150º
   f) 1290º
   g) Sabiendo que tg 18º = 0,32 calcular la razones trigonométricas de los siguientes ángulos:
      i) 72º
      ii) 108º
      iii) 162º
      iv) 198º
      v) 252º
      vi) 288º
      vii) 342º

6. Sabiendo que $\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{2}$ siendo $0 < \alpha < 90$ y $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ siendo $90 < \beta < 180$ calcular:
   a) $\text{sen}\ 2\alpha$
   b) $\text{tg}\ 2\beta$
   c) $\text{sen}\ (\alpha+\beta)$
   d) $\text{tg}\ (\beta-\alpha)$
   e) $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$
   f) $\text{sen}\left(\frac{\beta}{2} - 2\alpha\right)$

7. Calcular: $\dfrac{\text{sen}\ 105^\circ + \text{sen}\ 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}$

8. Simplificar las siguientes expresiones:
   a) $\text{sen}\ \alpha \cdot \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$
   b) $\text{sen}\ \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \left(\text{tg}\ \alpha + \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}\right)$
   c) $\text{Sen}\ 3 + \text{sen}\ \alpha \cdot \cos^2\alpha$
   d) $\sqrt{1-\text{sen}\alpha} \cdot \sqrt{1+\text{sen}\alpha}$
   e) $\text{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha$
   f) $\cos^3\alpha + \cos^2\alpha \cdot \text{sen}\ \alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen}^2\alpha + \text{sen}^3\alpha$

g) $\dfrac{\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha-\mathrm{sen}^4\alpha}$

h) $\dfrac{\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha}{\mathrm{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha}$

i) $\dfrac{\sec^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sec^2\alpha-\cos^2\alpha}$

j) $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$

k) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\mathrm{sen}\alpha}$

9. Demostrar si son verdaderas o falsas las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$

b) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha}$

c) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$

d) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

e) $\mathrm{sen}^2\alpha-\cos^2\beta=\mathrm{sen}^2\beta-\cos^2\alpha$

f) $\dfrac{\mathrm{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

g) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha-\mathrm{sen}\alpha}$

h) $\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\mathrm{sen}^2\alpha\cdot\mathrm{sen}^2\beta=\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\beta$

i) $\mathrm{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=1$

j) $(\mathrm{sen}\,\alpha+\cos\alpha)^2+(\mathrm{sen}\,\alpha-\cos\alpha)^2=2$

k) $\operatorname{ctg}\alpha-\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

l) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}$

m) $\dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\cos\alpha$

n) $\dfrac{1-\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1+\mathrm{sen}\,\alpha}$

o) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2\operatorname{cosec}2\alpha$

p) $\mathrm{sen}\,2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

q) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)+\mathrm{sen}(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\beta$

r) $2\cdot\operatorname{tg}\alpha=\mathrm{sen}\,2\alpha\,\sec^2\alpha$

s) $\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta)\cdot\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)=\mathrm{sen}^2\alpha-\mathrm{sen}^2\beta$

t) $\cos^2\alpha=\sqrt{1+\cos 2\alpha}$

u) $\operatorname{tg}^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\mathrm{sen}^2\alpha$

v) $\mathrm{sen}^3\alpha\cdot(1+\operatorname{cotg}\alpha)+\cos^3\alpha\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha)=\mathrm{sen}\,\alpha+\cos\alpha$

w) $\dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}=2\operatorname{cosec}\alpha$

x) $\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=4\operatorname{cosec}^2 2\alpha$

y) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta} = \dfrac{\text{tg}\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$

z) $\sec 2\alpha = \dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$

aa) $\text{tg}\,\alpha + \text{ctg}\,\alpha = 2\cdot\text{cosec}\,2\alpha$

bb) $\sec^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha + \text{tg}^2\alpha$

10. Demostrar que en todo triangulo rectángulo se cumple:

i. $\text{sen}\,\hat{B}\cdot\text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{b^2}{a\cdot c}$

ii. $\text{sen}\,2\hat{B} = \dfrac{2bc}{a^2}$

iii. $\text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{\text{sen}\,\hat{B} + \cos\hat{C}}{\cos\hat{B} + \text{sen}\,\hat{C}}$

iv. $\text{tg}\,\hat{A} + \text{tg}\,\hat{B} + \text{tg}\,\hat{C} = \text{tg}\,\hat{A}\cdot\text{tg}\,\hat{B}\cdot\text{tg}\,\hat{C}$

11. Expresar sen 2α y cos 2α en función de tg α.

5. P

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Resolver las siguientes ecuaciones en los intervalos indicados:
   a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$
   b) $6\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x + 1 = 0$
   c) $2\cdot\operatorname{sen} x + 2\cdot\cos x = \sqrt{2}$
   d) $\cos 2x = \operatorname{sen} x$
   e) $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$
   f) $\cos 2x = 2\cdot\operatorname{sen}2x$
   g) $2\cdot\operatorname{sen}^2 x + 3\cdot\cos x = 0$
   h) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cdot\cos x = 0$
   i) $\cos 2x + 1 = \cos x$
   j) $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 4\cdot\operatorname{sen}2x$
   k) $2\cos^2 x + 3\cdot\cos x = 2$
   l) $\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x = 0$
   m) $\operatorname{sen}^2 x - 3\cdot\operatorname{sen} x\cdot\cos x + 2\cdot\cos^2 x = 0$
   n) $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tag} x$
   o) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = ½$
   p) $\operatorname{tg}x \cdot \sec x = \sqrt{2}$
   q) $\cos 2x - \cos 6x = \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$
   r) $2\cdot\operatorname{tg} x - 3\cdot\operatorname{ctg} x - 1 = 0$
   s) $3\cdot\cos x = 2\cdot\sec x - 5$
   t) $\cos 2x = 5 - 6\cdot\cos^2 x$
   u) $\operatorname{cosec} \alpha\cdot\sec \alpha\cdot\cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$
   v) $2\cdot\operatorname{sen} x + 1 = \operatorname{cosec} x$
   w) $\sec x + \operatorname{tg} x = 2$
   x) $\operatorname{sen}x + \cos ecx = \frac{13}{6}$
   y) $\cos 2x = \operatorname{sen} x$
   z) $\operatorname{tg}^2 x + 3 = 4\cdot\operatorname{tg}$
   aa) $\cos x - 2\cdot\operatorname{sen} x\cdot\cos x = 0$
   bb) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$
   cc) $2\cdot\cos^2 x + 4\cdot\operatorname{sen}^2 x = 3$
   dd) $\sec x + 4\cdot\cos x = 5$

TRIANGULOS RECTANGULOS

1. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, si sen B = 1/3 y que el lado AC es igual a 10cm. Calcular los otros lados de este triángulo.

2. Un individuo cuya altura es de 1,75 m. proyecta una sombra de 1,90 m. Calcular las razones trigonométricas del ángulo que forman los rayos del Sol con la horizontal.

3. Una torre se a 300 m de su pie, bajo un ángulo de 10°. Calcular su altura. Dato: sen10°=0'1736

4. Desde un faro situado a 40 m sobre el nivel del mar el ángulo de depresión de un barco es de 55°. ¿A qué distancia del faro se halla el barco?

5. La altura máxima del sol sobre el horizonte se produce en Madrid al mediodía solar del 21 de junio, y es de 73°. ¿Qué sombra proyectaría un poste de 1'75 m?

6. Una cometa esta unida al suelo por un hilo de 100 m, que forma con la horizontal del terreno un ángulo de 60°. Suponiendo que el hilo esta tirante, hallar a que altura sobre el suelo se encuentra la cometa.

7. Calcular la longitud del lado y el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 10 cm.

8. En una circunferencia de 50 cm de diámetro se traza una cuerda se 30 cm de longitud, cuanto mide el ángulo central.

9. La longitud del lado de un octógono regular es 12 cm, Hallar el radio de la circunferencia inscrita y circunscrita.

10. La distancia de un cañón a una carretera es de 12 Km. El alcance del cañón es de 16 Km. Suponiendo que la carretera es recta, ¿qué longitud de la carretera está dominada por el cañón? que ángulo sobre la carretera domina.

11. Un triángulo isósceles esta inscrito en una circunferencia de 50 cm de diámetro, si el lado desigual es de 30 cm de longitud, calcular la longitud de los otros dos lados, los ángulos y el área.

12. Desde un barco se divisa el alto de una montaña bajo una visual que forma con la horizontal un ángulo de 60°. Si el barco se aleja 100 m. la nueva visual forma un ángulo de 30° con la horizontal. Calcular la altura de la montaña.

13. Al observar desde el suelo el punto más alto de un árbol, el ángulo de la visual y la horizontal mide 50°. Desde 12 m más atrás el ángulo es de 35°. Calcula la altura del árbol gráficamente y por técnicas trigonométricas.

14. Calcular la altura de un poste sabiendo que desde un cierto punto se ve bajo un ángulo de 7°. Si nos acercamos 20 m, lo veremos bajo un ángulo de 10°. Datos: tg 7° = 0,1228; tg 10° = 0,1763.

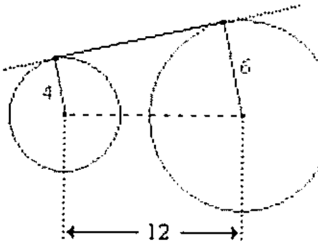
15. Se quiere calcular la altura de una colina situada al borde del mar, si colocamos un poste de 10 m sobre su punto más alto, desde un punto de la orilla del mar, se observan los vértices inferior y superior del poste bajo ángulos de 87'67° y 87'69° respectivamente. Calcular la altura de la colina sobre el nivel del mar.

16. Dos observadores separados 250 m ven un globo estático situado entre ellos bajo ángulos de 72° y 85°. A que altura se encuentra el globo. A que distancia del globo se encuentra cada observador.

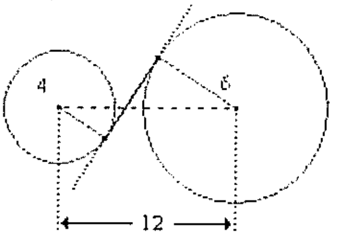
17. Un observador colocado a una altura de 120 m sobre el nivel del mar, dirige la vista hacia el horizonte y ésta visual forma con la vertical un ángulo de 89°39'. Calcular el radio de la tierra supuesta esférica. A que distancia se encuentra el horizonte.

18. Dos torretas de vigilancia forestal se encuentran situadas respectivamente a 250 y 300 m de altura. Si la visual que une los puntos de observación de ambas torretas forma un ángulo de 5° con la horizontal, cual debe ser el alcance mínimo de las radios que usan los vigilantes para que puedan estar en contacto.

19. Calcular el ángulo que forma la tangente exterior a dos circunferencias, de radios 6 y 4 cm, con la recta que une los centros de ambas, si estos distan 12 cm. Calcular la longitud de dicha tangente.



20. Calcular el ángulo que forma la tangente interior a dos circunferencias, de radios 6 y 4 cm, con la recta que une los centros de ambas, si estos distan 12 cm. Calcular la longitud de dicha tangente.



TRIÁNGULOS

1. Resolver los siguientes triángulos:

	a	b	c	A	B	C
i	-	57	100	57°	-	-
ii	-	57	100	-	57°	-
iii	7	17	-	-	76°	-
iv	12	15	18	-	-	-
v	15	20	-	30°	-	-
vi	-	12	10	-	95°	-
vii	-	80	-	15°	30°	-
viii	40	-	-	-	45°	75°

2. Dos observadores separados 250 m ven un globo estático situado entre ellos bajo ángulos de 72° y 85°. A que altura se encuentra el globo. A que distancia se encuentra cada observador del globo.

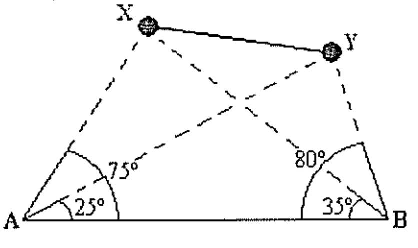
3. Dos fuerzas de 46 N y 25 N dan una resultante de 58 N. Calcular el ángulo que forman entre sí, y los que forman cada una de ellas con la resultante.

4. La base de un triángulo isósceles mide 58 cm y los lados iguales 39 cm. Calcular los ángulos.

5. Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B de una orilla se observa un punto C de la orilla opuesta. Las visuales forman con la orilla unos ángulos de 42° y 56° respectivamente. Calcular la anchura del rio sabiendo que la distancia entre los puntos A y B es de 31,5 m

6. Calcular la altura de un repetidor de TV ubicado en la cima de una montaña sabiendo que desde un punto alejado del pie de la montaña la base y el vértice del repetidor se ven bajo unos ángulos de 66° y 70° respectivamente. Si nos alejamos de esa posición en línea recta 12,5 m el vértice ahora lo vemos bajo un ángulo de 67°.

7. Calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles (X e Y) si desde dos puntos, A y B que distan 210 m, se observan los puntos X e Y bajo las visuales que muestra la figura.



8. Un poste inclinado 12° de la vertical hacia la posición del Sol, proyecta una sombra de 11,32 m cuando la altura del Sol (ángulo al que se encuentra sobre el horizonte) es de 53°30'. Hallar la longitud del poste.

9. Dos barcos salen de un puerto con rumbos distintos, formando ángulo de 127°. El primero partió a las 10 h. con velocidad de 17 Km./h. El segundo lo hizo a las 11'30 con velocidad de 26 Km./h. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 Km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde?.

10. En el triángulo ABC conocemos el ángulo A = 40°, y los lados b = 4 cm y c = 8 cm. Dibújalo. Traza la altura, la mediana y la bisectriz que parten del vértice C y calcula sus medidas trigonometricamente.

11. En el triángulo ABC conocemos a = 36 cm. b = 42 cm. y A = 34°. Demuestra que hay dos triángulos que verifican las condiciones anteriores. (Puedes verlo haciendo el dibujo a escala). Calcula el área del de mayor superficie.

12. Una mesa de ping-pong es un rectángulo de 9x5 pies. Calcula el ángulo que forman al cortarse las diagonales de dicho rectángulo.

13. Calcula el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 8 cm.

14. Dos exploradores que caminan por una estepa se separan a las 2 de la tarde. Deciden caminar siempre en linea recta. Sus trayectorias forman un ángulo de 70º, para ello cuentan con brújulas y mapas que les permiten mantener el rumbo. Sus velocidades de marcha son 4 y 5 Km./h respectivamente. Van también provistos de un "Walkie-talkie" que tiene un alcance de 15 Km, esto les permitir estar en conexión un buen rato. ¿Hasta qué hora?.

15. En un paralelogramo conocemos la medida de los lados, 8 y 11 m. Los ángulos obtusos miden 110º cada uno. Calcula la medida de la diagonal mayor del paralelogramo y el área.

16. En una circunferencia de radio 5 cm. se considera un arco de 125º. Calcular:

a. La longitud de la cuerda, y el área del triángulo que determina la cuerda con los radiovectores.
b. El área del sector circular y el área del segmento circular correspondiente a ese arco.

17. Calcular el área de un triángulo del que se conoce el lado $a = 8$ m y los ángulos $B = 30^\circ$, $C = 45^\circ$. (No utilizar calculadora).

8 P

VECTORS I RECTES

1. Realiza las siguientes operaciones con pares numéricos
   a) $-5\cdot(3\,,-2)+3\cdot(2\,,-1)$
   b) $[2\cdot(1\,,-2)+5\cdot(-3\,,0)]-\frac{1}{2}\cdot(3\,,4)+6\cdot(-1\,,-8)$
   c) $2\cdot(3\,,2)-5\cdot(-1\,,2)+3\cdot(6\,,2)-(0\,,1)$
   d) $-3\cdot(x\,,2y)+3\cdot(2x\,,y)+2\cdot(0\,,-1)-3\cdot(3\,,-2)$

2. Hallar x e y para que se cumplan las siguientes igualdades
   a) $3\cdot(x\,,2y)=(-1\,,5)$
   b) $-2\cdot(-1,y)=6\cdot(x,x-y)$

3. Sea ABCD un cuadrado, N el punto medio del lado AD y O el centro del cuadrado. Razonar si las siguientes parejas de vectores tienen el mismo módulo dirección y sentido.
   a) $\overline{AN},\overline{BC}$
   b) $\overline{AN},\overline{NO}$
   c) $\overline{AO},\overline{CA}$
   d) $\overline{AN},\overline{ND}$

4. Sea ABCD un paralelogramo y O su centro. Razonar si las siguientes parejas de vectores son equipolentes.
   a) $\overline{AB}\approx\overline{CD}$
   b) $\overline{BA}\approx\overline{CD}$
   c) $\overline{AB}\approx\overline{AD}$
   d) $\overline{AO}\approx\overline{OC}$

5. Sea ABC un triángulo. Si u ={AB} y v ={AC}, representar:
   a) $\bar{u}+\bar{v}$ b) $\bar{v}-\bar{u}$ c) $2\bar{v}$ d) $\frac{1}{2}\bar{u}$ e) $2\bar{u}-\bar{v}$

6. Estudiar si los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son equipolentes siendo A(1, 3), B(4, 1), C(−1, 1), D(2, −1).

7. Demostrar que el cuadrilátero de vértices A(3, 2), B(9, 4), C(13, 8) y D(7, 6) es un paralelogramo.

8. Calcular A para que los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sean equipolentes siendo B(2, −1), C(−3, 2) y D(−5, −3).

9. Sean A(1, 2), B(2, 3), C(0, 4). Determina D para que ABCD sea un paralelogramo. Halla la longitud de BC

10. Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores
    a) $\{(4,12),(2,6)\}$
    b) $\{(1,2),(3,4)\}$
    c) $\{(1,0),(0,1)\}$
    d) $\{(1,3),(5,4),(-3,7)\}$

11. ¿Son $\vec{v}=(1,2)$ y $\vec{w}=(-3,1)$ linealmente dependientes?

12. Determinar para que valor de λ el vector (3λ, 2) es linealmente dependiente del vector (2,4)

13. Probar que B = { $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ } es una base del plano vectorial, siendo $\bar{u}_1=(4,0)$ y $\bar{u}_2=(5,1)$.

14. Probar que B = { $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ } es una base del plano vectorial, siendo $\bar{v}_1 = (-1, 2)$ y $\bar{v}_2 = (2, 1)$. En caso afirmativo, expresar $\bar{a}$ (3, −1) en función de la base.

15. ¿Son linealmente dependiente los vectores $\bar{u}_1 = (1,5)$, $\bar{u}_2 = (2,3)$ y $\bar{u}_3 = (1,-2)$?. En caso afirmativo escribir $\bar{u}_2$ como combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_3$.

16. Expresar $\bar{c} = (-1,8)$ como combinación lineal de $\bar{v} = (1,2)$ y $\bar{w} = (-3,1)$.

17. Comprobar que los vectores (1, 3) y (2, −1) forman una base de V_2. Hallar las coordenadas del vector (1, 10) en dicha base.

18. Sea A(1,1), B(3,4). Determina un punto M' para que $\overline{AM'} = \frac{2}{3}\overline{BA}$.

19. Mediante el cálculo vectorial hallar el punto medio del segmento $\overline{AB}$, siendo A(3,−2) y B(−2,5).

20. Hallar las coordenadas de un punto N tal que $\overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{NB}$, siendo A(1,4) y B(3,5)

21. Sea $\bar{a}$ el vector de componentes (−1,2), sabiendo que tiene por extremo el punto Q(−1,−2), calcular las coordenadas del origen del vector. Cual es el módulo del vector $\bar{a}$. Si $\bar{b} = (1/2,-1)$ hallar x para que el vector $\bar{a} = x \cdot \bar{b}$

22. Mediante el cálculo vectorial comprobar si están alineados los puntos A(−1,3) B(3,5) y C(1,6).

23. Calcular las coordenadas de los vértices de un triángulo, sabiendo que los puntos medios de sus lados son M(1, 4) N(−1, 2) y P(−4, 1).

24. De un paralelogramo se conocen los vértices consecutivos A(−9,−5), B(−7,−6). Calcular las coordenadas de los puntos C y D, si el centro del paralelogramo es M(−5,−1).

25. Hallar b para que los puntos A(−2,5), B(3,0) y C(b,7) estén alineados, para el valor de b calculado, estudiar la posición relativa de los puntos.

26. Calcular las coordenadas de los puntos que dividen al segmento $\overline{PQ}$ en tres partes iguales, siendo A(1,3) y B(2,8).

9 P

PRODUCTO ESCALAR

1. Hallar el producto escalar de los vectores $\vec{a} = (-6,4)$ y $\vec{b} = (4,5)$.

2. Halla $\vec{a} \circ \vec{b}$ si $\vec{a} = (2,-4)$, $|\vec{b}| = 2$ y el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ a y $\vec{b}$ es de 60°.

3. Hallar el producto escalar y el ángulo que forman los vectores $\vec{v}(3,4)$ y $\vec{w} = (-4,3)$.

4. Calcular los ángulos y la longitud de los lados del triángulo ABC, sabiendo que las coordenadas de sus vértices son los puntos A(0, 0), B(1, 3) y C(4, 2).

5. Hallar un punto B de la perpendicular a OX que pasa por A(2, 1) de tal forma que, los vectores de posición de ambos puntos formen entre si un ángulo de 30°.

6. Comprueba que el ángulo formado por los vectores $\vec{v} = \left(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1\right)$ y $\vec{w} = \left(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1\right)$ es de 60°.

7. Las componentes de $\vec{a}$ son $\left(\sqrt{3}, 1\right)$. Sabiendo que forma un ángulo de 60° con $\vec{b}$ y tienen igual módulo, calcular las componentes de $\vec{b}$.

8. Calcular s de modo que $\vec{a}(1, s)$ y $\vec{b}(-3, s)$ sean perpendiculares.

9. Hallar las componentes de un vector unitario y perpendicular al segmento $\overline{AB}$, siendo A(−1,2) y B(−3,−4).

10. Dados los vectores $\vec{a} = (1, 4)$ y $\vec{b} = (6, 2)$, determina el ángulo que forma la bisectriz de estos vectores con el eje OX.

11. Deseamos trazar la tangente desde un punto A a una circunferencia. Sabiendo que las coordenadas de A son (−3, 4) y que la circunferencia está centrada en el origen de ordenadas y es de radio unidad, calcular las coordenadas del punto de tangencia P(x, y).

12. Dados los vectores $\vec{u} = (1,-1)$ y $\vec{v} = (-1,2)$ hallar:

a) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

b) El vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

13. Hallar el área de un triángulo de vértices A(1, 3), B(3, 6) y C(7, 2).

14. Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base ortonormal y $\vec{a} = -2\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2$; $\vec{b} = 5\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$, hallar a_2 para que el producto escalar de $\vec{a} \circ \vec{b} = 6$.

15. Probar que los vectores $\vec{U}_1 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ y $\vec{U}_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ forman una base ortonormal, Hallar las coordenadas de vector $\vec{v} = (2,-1)$ respecto de dicha base.

16. Probar que si $\vec{v} = (\cos\alpha, -\sin\alpha)$ y $\vec{u} = (\sin\alpha, \cos\alpha)$ son perpendiculares y unitarios.

17. Probar que los puntos A(1, 7), B(4, 6), C(4, −2) ,D(6, 2) pertenecen a una circunferencia de centro O(1,2).

18. Dados los puntos $A\left(-\sqrt{3}, 1\right)$, $B(5, -4)$, $C(-5, 3)$ calcular el ángulo que forman $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

19. Hallar el valor de a para que los vectores $\vec{z} = (3, 4)$ y $\vec{w} = (a, -2)$ formen un ángulo de 45°.

20. Hallar un vector unitario en la misma dirección y sentido que el vector $\vec{z} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$. Hallar otro igual pero en sentido opuesto.

21. Hallar un vector de módulo 10 en la dirección de $4\vec{i} + 3\vec{j}$.

22. Dados los vectores $\vec{u} = (4,-3)$ y $\vec{v} = (1, m)$. Calcula el valor de m para que:

a) Angulo formado entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60°

b) $\vec{u} + 2\vec{v}$ sea perpendicular a $2\vec{u} - \vec{v}$

23. Hallar el producto escalar de los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ y $\vec{b} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$ sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman 30° y que $|\vec{u}| = 4$ $|\vec{v}| = 5$.

24. Calcular a y b para que los vectores $\vec{v} = (-2, a)$ y $\vec{u} = (b,1)$ formen 60° y además $|\vec{u}| = \sqrt{5}$

25. Dados los vectores $\vec{v} = (1,-1)$ $\vec{w} = (2, x)$. Calcular x para que dichos vectores formen 45°.

26. Dados los vectores $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (-\sqrt{3}, 1)$ y $\vec{c} = (1, -2)$ Calcular:

a) El ángulo que forma $\vec{a}$ y $\vec{b}$

b) Las coordenadas de un vector perpendicular a $\vec{c}$ de modulo 2

c) La proyección del vector $\vec{a}$ sobre $\vec{c}$

d) El vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$

27. Se tienen los vectores $\vec{v} = (4,0)$, $\vec{u} = (1,5)$. Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

28. Calcular los valores de m y de n para que los vectores

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, m\right), \quad \vec{v} = \left(n, \frac{-1}{6}\right)$$

a) Sean unitarios

b) Sean ortogonales.

c) Si m = n = 1, calcular las proyecciones de $\vec{u}$ en $\vec{v}$ y de $\vec{v}$ en $\vec{u}$

29. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son tales que: $|\vec{a}| = 10; |\vec{b}| = 10\sqrt{3}; |\vec{a} + \vec{b}| = 20$. Hallar su producto escalar y el ángulo que forman.

30. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores de igual módulo y $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, calcular el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$

31. Sea el triángulo de vértices A(2, 3), B(1, 0) y C(3, 4). Calcular:

i. Módulo de $\overline{AB}$

ii. Ángulo de $\overline{AB}$ con $\overline{AC}$

iii. Proyección de $\overline{AB}$ sobre el eje x

iv. Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$

v. Vector unitario en la dirección de $\overline{AC}$

vi. Vector proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$

vii. Área del triángulo

viii. Determina el valor de a para que el vector (a, −1) sea ortogonal al vector $\overline{BC}$

ix. Valor de a para que el punto (a, 2) forme con B y C un triángulo de área 4 unidades cuadradas.

10. P

1. Escribir en todas sus formas la ecuación de la recta que pasa por A(−5, 0) y cuyo vector director tiene por componentes (4, −3). ¿Pertenece a la recta el punto (0, 2).

2. Dada la recta $r \equiv \frac{x+5}{-2} = \frac{y}{7}$, escribir las coordenadas de tres puntos de r, así como tres vectores directores.

3. Dada la recta $2x - 7y = 0$ indica un vector director y su pendiente.

4. Dibuja las rectas $3x + y = 4$, $y = -8$, $x = 2$, $x = -1$

5. Una recta corta a los ejes de coordenadas en los puntos (3,0) y (0,4). Hallar su ecuación explícita.

6. Son paralelas las rectas $x - 3 = \frac{y+2}{-3}$ y $6x + 2y - 9 = 0$

7. Dada la recta de ecuación $2x - 5y + 2 = 0$, escribir:
   a) las coordenadas de un punto de la recta.
   b) componentes de un vector director de la recta.
   c) el punto en que dicha recta corta al eje de abscisas.

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,−2) y es paralela al eje de ordenadas.

9. Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos A(1,3) y B(5,−2). Dar su pendiente y la ordenada en el origen.

10. Pasar la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ a forma continua, general, explícita y vectorial.

11. Dada la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2}$ escribir sus ecuaciones paramétricas. Hallar la ecuación general y explícita de dicha recta.

12. Dada la recta $4x - 2y - 10 = 0$. Escribir una de sus ecuaciones paramétricas, la ecuación continua, la ecuación explícita y vectorial.

13. Estudiar la posición de las siguientes parejas de rectas.

a) $\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 5y - 2 = 0 \\ -2x - 10y + 4 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 2x - 4y + 7 = 0 \end{cases}$

14. Hallar m para que las restas $2x - 3y + 15 = 0$ y $mx - y + 7 = 0$ sean paralelas, para que sean perpendiculares.

15. Determinar m y n sabiendo que la recta $mx + 3y + n = 0$ pasa por (1,5) y es paralela a la recta $2x - 4y - 2 = 0$.

16. Si las ecuaciones de los lados de un triángulo son $x - 2y - 1 = 0$, $x + 3y - 11 = 0$ y $3x + 4y - 3 = 0$, hallar sus vértices.

17. Si A(−1,3), B(3,1) y C(5,3) son los vértices de un triángulo, calcular las ecuaciones de las medianas y el punto donde se cortan.

18. Los puntos A(2,2), B(5,4) y C(6,7) son vértices de un paralelogramo. Hallar las coordenadas del vértice D y las ecuaciones de sus lados.

19. Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(1,5) y es paralela $x+2y+2=0$.

20. Dadas las rectas $r \equiv (x,y)=(5,-3)+t\cdot(7,-6)$ y s: $3x-2y+9=0$ hallar el punto donde se cortan.

21. En que puntos corta la recta $3x-2y+6=0$ a los ejes de coordenadas.

22. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (3, −9) y es paralela a la recta que pasa por los puntos (8, 5) y (−3, 2).

23. Hallar la ecuación de la recta paralela a $8x-7y+3=0$ y que pasa por (2,3).

24. Las rectas $2mx+(m-5)y-m=0$ y $9x-9y+8=0$ son paralelas. Hallar m.

25. Hallar "a" para que las rectas $r \equiv ax+(a-1)y-2(a+2)=0$ y $s \equiv 3ax-(3a+1)y-(5a+4)=0$ sean perpendiculares.

26. Las rectas $r \equiv 3x-my=5$ y $s \equiv 2x+ny=7$ son perpendiculares. Hallar m y n sabiendo que s pasa por el punto (2,1).

27. Las rectas $r \equiv ax-4y+4=0$ y $r' \equiv 2x-y+1=0$ son perpendiculares y concurren en un punto de la recta $3x+by=10$. Hallar a, b y el punto común.

28. Las rectas $r \equiv ax-y-4=0$ y $r' \equiv x-y+b=0$ son perpendiculares y cortan al eje OX en dos puntos que distan 5 unidades. Hallar a y b.

29. Hallar m y n para que las rectas $nx+y+5=0$, $y=mx-3$ sean paralelas y la 1ª pase por el punto A(3,-2).

30. Hallar m y n sabiendo que $mx+2y=6$, $nx+y=9$ son paralelas y la segunda pasa por el punto del eje OX que dista 3 unidades positivas del origen.

31. Dada la recta $r \equiv \dfrac{x-m}{m+1}=\dfrac{y+3}{2}$, hallar m para que:

a) Sea paralela a $s \equiv x=2y-3$
b) Forme 135º con OX
c) Sea vertical
d) Pase por (1,1)
e) Su ordenada en el origen valga −7

32. Si A(1,3), B(3,5) y C(5,2) son vértices de un triángulo. Hallar la mediana de vértice A.

33. Determinar la ecuación de la recta que forma con OX un ángulo de 30º y pasa por el punto (−2,−3).

34. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1,0) y corta al eje OY formando con el un ángulo de 30º.

35. Ecuaciones de la paralela y de la perpendicular por el punto P=(3,-1) a cada una de las rectas:

a) $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - 5\lambda \end{cases}$

b) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{4}$

c) $3x - 4y + 7 = 0$

d) $y = 3x - 4$

e) $y - 3 = -2 \cdot (x + 2)$

f) $x = 1$

g) $y = -3$

f. $x = 1$ Recta vertical.

- Paralela por $P(3,-1)$: $s \equiv x = 3$
- Perpendicular por $P(3,-1)$: $s' \equiv y = -1$

g. $y = -3$ Recta horizontal.

- Paralela por $P(3,-1)$: $s \equiv y = -1$
- Perpendicular por $P(3,-1)$: $s' \equiv x = 3$

36. Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(-2,3)$ y es paralela a $y = 2x+2$.

37. Halla el punto de intersección de la recta $y-2x-2=0$ con su perpendicular trazada por $P(-2,3)$.

38. Halla las coordenadas de P', simétrico de $P(1,-2)$ respecto de $A(3,4)$.

39. Halla las coordenadas de P', simétrico de $P(1,-2)$ respecto de la recta $y = \dfrac{3}{4}x$.

40. Halla la ecuación de una recta que pasa por $\left(3, \dfrac{5}{2}\right)$ y limita con los ejes coordenados una superficie de área 15.

41. Dadas las rectas:

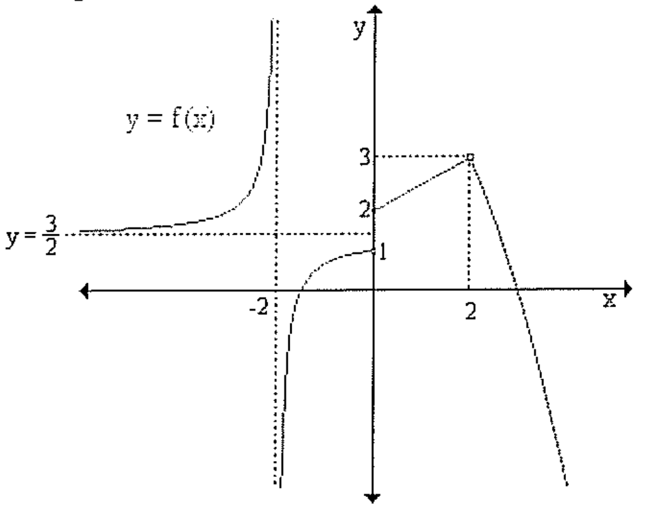
$$r \equiv \begin{cases} x - 2 = 5t \\ y = -2t \end{cases} ; s \equiv x + ay = 0 ; t \equiv y = bx + 3$$

Hallar los valores de a y b para que r sea perpendicular a s y a t.

42. Calcula a y b para que las rectas $2x - 3y - b = 0$, y $6x - ay - 1 = 0$, son perpendiculares y que la primera pasa por el punto $A(1, 0)$.

Funcions. MP

1. Sea f(x) la función de la figura:



calcular:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

i) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$

j) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

k) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

2. Calcula el límite de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)^3(3x+2)^2}{x(x^2+1)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{x+\sqrt[3]{x^2}}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5}-x+5\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{x^2}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{x^2+5}\right)^{2x-1}$

3. Calcula el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a menos infinito:

a) $\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x-1\right)$ b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2}$ c) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2}$

4. Calcula el límite cuando $x\to\pm\infty$ de las siguientes funciones:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{3x^2}{x-3}\right)$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{5^x}{4^x}$ c) $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2x}}{x^2-\sqrt{2x}}}$

5. Calcula m con la condición:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2-4}=6$$

6. Dada $f(x)=\frac{2x^2-6x-8}{x^2-4x}$, calcula su límite:

a) Cuando x tiende a 1
b) Cuando x tiende a 0
c) Cuando x tiende a 4

7. Calcula el límite de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ b) $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$

c) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-4}$ d) $\lim_{x\to-1}\frac{x+(2+x)^2}{1+x}$

e) $\lim_{x\to-2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8}$ f) $\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2+4x+2}$

8. Dada $f(x)=\frac{x^2+mx-6}{3x-9}$ calcula m para que tenga límite finito cuando x tiende a 3. ¿Cuanto vale entonces el límite?

9. Calcula los siguientes límites:

Solución.

a) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2+3}{x-1}\right)$ b) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{1-x^3}\right)$

c) $\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{2}{8-x^3}\right)$ d) $\lim_{x\to3}\left(\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-4x+3}\right)$

e) $\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{5+x}-\frac{1}{5}}{x}$ f) $\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}\right)$

g) $\lim_{x\to8}\frac{x-8}{\sqrt{x}-\sqrt{8}}$ h) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$

i) $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-x-3}{x+2-\sqrt{2x+3}}$ j) $\lim_{x\to3}\frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$

k) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}$ l) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$.

m) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+2}$ n) $\lim_{x\to0}(1+2x)^{x+2/x}$

ñ) $\lim_{x\to 0}\left(1+x+x^2\right)^{1/x}$ o) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{1/x-1}$

p) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)^{1/x-1}$ q) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)^{1/x-2}$

10. Sean: $f(x)=\frac{3x-3}{5x+5}$ $g(x)=\frac{5x}{3x+2}$ $h(x)=\frac{x-2}{4x+1}$

calcular:

a) $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot\left(g(x)-h(x)\right)\right]$

b) $\lim_{x\to -1/4}\left(g(x)\cdot h(x)\right)$

c) $\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot h(x)\right)$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{3}f(x)$

* 11. Determinar el valor de "a" para que:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2-x}\right)^{\frac{a}{x-1}}=e^8$$

12 P

1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$

d) $f(x)=\begin{cases} 9-x^2 & \text{Si} \quad x\le 1 \\ x+1 & \text{Si} \quad x>1 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 4-2x & \text{Si} \quad x<0 \\ 2x+4 & \text{Si} \quad x>0 \end{cases}$

f) $g(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si} \quad x<-3 \\ 3x+1 & \text{si} \quad -3\le x<1 \\ 2x^2+2 & \quad x>1 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{Si} \quad -2\le x<0 \\ -\dfrac{1}{3}x+2 & \text{Si} \quad 0\le x<3 \\ x-2 & \text{Si} \quad 3<x<5 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x+2} & \text{Si} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{x^2-1} & \text{Si} \quad x\ge 0 \end{cases}$

i) $f(x)=\left|x^2-9x+8\right|$

j) $f(x)=|x|+|x-1|$

k) $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

l) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{Si} \quad x\ne 0 \\ 1 & \text{Si} \quad x=0 \end{cases}$

m) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x^3-8} & \text{Si} \quad x\ne 2 \\ 1/4 & \text{Si} \quad x=2 \end{cases}$

2. Calcula el valor del parámetro a para que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{Si} \quad x\le 1 \\ \operatorname{Ln} x & \text{Si} \quad x>1 \end{cases}$$

3. Calcula los valores de a y b para que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{Si} \quad x<-1 \\ x^2+ax+b & \text{Si} \quad -1\le x\le 1 \\ x+1 & \text{Si} \quad x<1 \end{cases}$$

4. Calcula el valor del parámetro a para que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{Si} \quad x\le a \\ x+3 & \text{Si} \quad x>a \end{cases}$$

5. Calcula el valor de k para que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x^2-1} & \text{Si} \quad x \neq 0 \\ K & \text{Si} \quad x = 0 \end{cases}$$

13 P

Estudiar sus asíntotas y ramas infinitas valorando la posición de la función respecto de ellas.

1. $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x-2}$

2. $f(x)=\dfrac{4x-2}{x^2-2x}$

3. $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$

4. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

5. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-3}$

6. $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$

7. $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-4}$

8. $f(x)=\dfrac{x^2-5}{2x-4}$

9. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x}$

10. $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

11. $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-2)^2}$

12. $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

13. $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$

14. $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

15. $f(x)=e^{1-x^2}$

14 P

3. Calcula las siguientes derivadas haciendo uso de las tablas y de las reglas principales:

i. $y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 8$

ii. $y = \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{5}{x^2} + 3x - 7$

iii. $y = \sqrt[5]{x^2} + 4\sqrt[4]{x^3}$

iv. $y = 5(x-1)(2x^3-2)(x^2+3)$

v. $y = 1 + \sqrt{1+x^2}$

vi. $y = x^4 - \sqrt[4]{x^3 - x}$

vii. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 2}{x + 1}$

viii. $y = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

ix. $y = x^5 - 3x^4 + 7x - 12$

x. $y = \dfrac{x + 6}{x^2 - 3x + 5}$

xi. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

xii. $y = (2x^2 + 3x - 1)^4$

xiii. $y = \dfrac{x^3 - 1}{(x+1)^2}$

xiv. $y = 7x^2 - 3x + \dfrac{12x - 1}{x + 3}$

xv. $y = x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

xvi. $y = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x - 3}}$

xvii. $y = \sqrt{\dfrac{3x + 1}{3x - 1}}$

xviii. $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}$

xix. $y = x^2 \operatorname{Ln} x + x \operatorname{Ln} x + 1$

xx. $y = x^4 + 4^x + 4^4$

xxi. $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

xxii. $y = \operatorname{sen} x^2 + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x^2$

xxiii. $y = \operatorname{tg}^3(\cos^2 x) - \operatorname{cotg}^4(\operatorname{sen}^3 x)$

xxiv. $y = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^8$

xxv. $y = 3^{\sqrt{\cos x}}$

xxvi. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

xxvii. $y = x^3 \cdot e^x$

xxviii. $y = \dfrac{e^x}{x-1}$

xxix. $y = \dfrac{xe^x}{(x+2)^2}$

xxx. $y = \dfrac{x^2-1}{e^x}$

xxxi. $y = (x + e^x) \operatorname{Ln} x$

xxxii. $y = e^{2x} \cdot \operatorname{tg} x^2$

xxxiii. $y = e^{\operatorname{tg} 2x}$

xxxiv. $y = x^3 + 37^x + \operatorname{Log}_3 x$

xxxv. $y = 7^{x^2+1} \cdot \lg_7(2x+1)$

xxxvi. $y = \dfrac{\ln x^2}{3^{x^2+1}}$

xxxvii. $y = \cos^4 \sqrt{x}$

xxxviii. $y = \left(\sqrt{x}\right)^{x^2}$

xxxix. $y = \cos^2 x + e^{\operatorname{sen} x}$

xl. $y = \dfrac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$

xli. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \operatorname{Ln}\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$

xlii. $y = \operatorname{Ln}\sqrt{\operatorname{sen} 2x}$

xliii. $y = \operatorname{Ln}\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$

xliv. $y = x \operatorname{arsen} x + \sqrt{1-x^2}$

xlv. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$

xlvi. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}$

xlvii. $y = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{x+1}$

xlviii. $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 5 = 0$

xlix. $\operatorname{sen} x + \cos y = \dfrac{1}{2}$

l. $x \cdot y = 5$

1.- Utilitzant la definició de derivada, trobeu la derivada de la funció que es dona en el punt que s'indica:

a) $y = 4x^2 - 5$ en el punt 3

b) $y = 2x^3 + 3x$ en el punt -1

c) $y = \dfrac{3}{2x+5}$ en el punt -1

d) $y = \dfrac{x+3}{2x-1}$ en el punt 1

2.- Calculeu la primera derivada de les funcions següents, simplificant el resultat el màxim possible.

1) $y = x^5 - 4x^4 + 2x - 5$

2) $y = 3x^4 - 2x^3 + 10x^2 + 8x$

3) $y = \dfrac{2}{3}x^6 - \dfrac{4}{5}x^2 + 3x$

4) $y = \dfrac{5}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 3x + 3$

5) $y = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{2}{5x} + x + 2$

6) $y = \dfrac{5}{x^3} - \dfrac{3}{2x^2} + \dfrac{1}{2x} + 3x + 5$

7) $y = 3\sqrt{x} + 5x - 2$

8) $y = 8\sqrt[3]{x} + 2x - 3$

9) $y = 5\sqrt{3x} - 4x + 6$

10) $y = 8\sqrt[3]{\sqrt{x}} + 4x - 3$

11) $y = \dfrac{x-4}{x+5}$

12) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

13) $y = \dfrac{5}{1+2x^2}$

14) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

15) $y = \dfrac{3x^2}{1-x}$

16) $y=(2x+3)^3$

17) $y=3\sin(4x-5)$

18) $y = 6^{3x-2}$

19) $y = \dfrac{(x-3)^2}{(x-2)^2}$

20) $y = \dfrac{(2x-3)^2}{(2x-2)^2}$

21) $y = \dfrac{x - 3}{(x + 5)^2}$

22) y = $e^{5x}(3x^2-6)$

23) $y = \sqrt[5]{\dfrac{3x^2}{1 - x}}$

24) $y=-2\ln(5x^2+x)$

25) $y = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

26) $y = (3x^2 - 5x)\sin\dfrac{x}{2}$

17) $y = \dfrac{e^{-x}}{1 + e^x}$

28) $y = \dfrac{3 - 5e^x}{2 + e^x}$

29)) y = tg x - x

30) $y = ctg^2\dfrac{x}{2}$

31) y = log $\sin^2 x$

32) $y = tg\dfrac{x}{3}$

33) y = x tg x

34) y = ln tg 2x

35) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

36) $y = \sqrt{\dfrac{3x^2}{1 - x}}$

37) $y = \sqrt[6]{\dfrac{3x + 4}{3x^3 - x}}$

38) $y = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

39) $y = \dfrac{x^4}{1 + x + x^2}$

40) $y = \dfrac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{e^{x^2} + e^{-x^2}}$

41) $y = \dfrac{\cos^5 x}{(1 - \cos x)^5}$

42) $y = \sqrt[4]{\dfrac{3x^2 + 2}{3x^2 - 2}}$

43) $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

44) y = 7^{3x-5}

45) y = e^{2x} tg(3x+8)

46) $y = \ln(x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x})$

3.- Trobeu l'equació de les rectes tangents a $y = 2x^2 - 5x - 3$ en el punt d'abscissa 2.

4.- Trobeu l'equació de les rectes tangents a $y = 2x^3 + 3x - 3$ en el punt d'abscissa -1.

5.- Trobeu l'equació de les rectes tangents a $y = 2x^2 - 5x - 3$ en els seus zeros.

6..- Trobeu l'equació de la tangent a $y = \sqrt{3x - 5}$ en el punt d'abscissa 2.

7.- Donada la funció $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$, l'equació de les tangents en el punt d'abscissa 1.

8.- Calculeu l'equació de la tangent a $y = e^{3x+1}$ en el punt d'abscissa -1/3.

9.- Donada la funció $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$, trobeu els punts de la corba que tenen pendent 1.

10.- Trobeu l'equació de les tangents a $y = 3x^2 - 9x$ en els seus zeros. Calculeu l'angle en que es tallen aquestes tangents.

11.- Estudieu el creixement de les funcions següents:

a) $y = x^5 - x^3$

b) $y = x^2 + 2x - 15$

c) $y = \dfrac{x - 4}{x + 5}$

d) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

e) $y = \dfrac{x - 3}{(x + 5)^2}$

f) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

g) $y = \dfrac{2x^2 - 8}{9 - x^2}$

h) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. Haz las siguientes divisiones:
   a) $\left(3x^2 - 5x^3 - 1 + x^4 - 4x\right) : \left(3 - 4x + x^2\right)$
   b) $\left(4x^2 - 19x + 4x^3\right) : \left(-3 + 2x\right)$
   c) $\left(2x^5 - 3\right) : \left(2x^2 - 4\right)$

Solución.

a. $\left(3x^2 - 5x^3 - 1 + x^4 - 4x\right) : \left(3 - 4x + x^2\right)$

Se ordenan los polinomios y se divide

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x - 1 & x^2 - 4x + 3 \\ \hline
\underline{-x^4 + 4x^3 - 3x^2} & x^2 - x - 4 \\
\quad -x^3 \qquad - 4x - 1 & \\
\quad \underline{x^3 - 4x^2 + 3x} & \\
\qquad - 4x^2 - x - 1 & \\
\qquad \underline{4x^2 - 16x + 12} & \\
\qquad\quad -17x + 11 &
\end{array}
$$

Cociente: $x^2 - x - 4$
Resto: $-17x + 11$

b. $\left(4x^2 - 19x + 4x^3\right) : \left(-3 + 2x\right)$

Se ordenan los polinomios y se divide

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3 + 4x^2 - 19x & 2x - 3 \\ \hline
\underline{-4x^3 + 6x^2} & 2x^2 + 5x - 2 \\
\quad 10x^2 - 19x & \\
\quad \underline{-10x^2 + 15x} & \\
\qquad -4x & \\
\qquad \underline{4x - 6} & \\
\qquad\quad -6 &
\end{array}
$$

Cociente: $2x^2 + 5x - 2$
Resto: -6

c. $\left(2x^5 - 3\right) : \left(2x^2 - 4\right)$

Se ordenan los polinomios y se divide

$$
\begin{array}{l|l}
2x^5 \qquad\qquad\qquad\quad - 3 & 2x^2 - 4 \\ \hline
\underline{-2x^5 \qquad 4x^3} & x^3 + 2x \\
\qquad\quad 4x^3 \qquad\quad - 3 & \\
\qquad\quad \underline{-4x^3 \quad + 8x} & \\
\qquad\qquad\qquad 8x - 3 &
\end{array}
$$

Cociente: $x^3 + 2x$
Resto: $8x - 3$

2. Utilizando Ruffini, hallar el cociente y el resto de las divisiones:

a) $\left(x^3 - x^2 + 11x - 10\right) : (x-2)$

b) $\left(8x^3 - 3x + x^4 + 20 + 12x^2\right) : (x+3)$

c) $\left(x^5 - 32\right) : (x+2)$

Solución.

a. $\left(x^3 - x^2 + 11x - 10\right) : (x-2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 11 & 10 \\ 2 & & 2 & 2 & 26 \\ \hline & 1 & 1 & 13 & \boxed{36} \end{array} \qquad \frac{x^3 - x^2 + 11x - 10}{x-2} = x^2 + x + 13 + \frac{36}{x-2}$$

Cociente = $x^2 + x + 13$
Resto = 36

b. $\left(8x^3 - 3x + x^4 + 20 + 12x^2\right) : (x+3)$ Se empieza ordenando el polinomio dividendo.

$\left(x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 3x + 20\right) : (x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 8 & 12 & -3 & 20 \\ -3 & & -3 & -15 & 9 & -18 \\ \hline & 1 & 5 & -3 & 6 & \boxed{2} \end{array} \qquad \frac{x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 3x + 20}{x+3} = x^3 + 5x^2 - 3x + 6 + \frac{2}{x+3}$$

Cociente = $x^3 + 5x^2 - 3x + 6$
Resto = 2

c. $\left(x^5 - 32\right) : (x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & \boxed{-64} \end{array} \qquad \frac{x^5 - 32}{x+2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 - \frac{64}{x+2}$$

Cociente = $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$
Resto = -66

3. Calcular el resto de las divisiones empleando el teorema del resto:

a) $\left(x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 7\right) : (x+1)$

b) $\left(\frac{x^4}{9} + \frac{5x}{6} - x^2\right) : (x-3)$

c) $\left(x^6 + 1\right) : (x+2)$

Solución.

a. $\text{Resto}\left(\frac{x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 7}{x+1}\right) = P(-1) = (-1)^5 - 2\cdot(-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 - 7 = -3$

b. $\text{Resto}\left(\frac{\frac{x^4}{9} - x^2 + \frac{5x}{6}}{x-3}\right) = P(3) = \frac{3^4}{9} - 3^2 + \frac{5\cdot 3}{6} = \frac{5}{2}$

c. $\text{Resto}\left(\frac{x^6 + 1}{x+2}\right) = P(-2) = (-2)^6 + 1 = 65$

4. Averiguar el resto de las divisiones. Si son exactas calcular también el cociente y poner el dividendo como producto de dos factores:

a) $\left(3x^4+5x^3-x-10\right):(x+2)$

b) $\left(5x-3x^3+8x^2-6\right):(x-3)$

Solución.

a. $$\text{Resto}\left(\frac{-3x^3+8x^2+5x-6}{x-3}\right)=P(3)=-3\cdot 3^3+8\cdot 3^2+5\cdot 3-6=0$$

Para descomponerlo se plica Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 5 & 0 & -1 & -10 \\ -2 & & -6 & 2 & -4 & 10 \\ \hline & 3 & -1 & 2 & -5 & \underline{|0} \end{array} \quad 3x^4+5x^3-x-10=\left(3x^3-x^2+2x-5\right)\cdot(x+2)$$

b. $$\text{Resto}\left(\frac{3x^4+5x^3-x-10}{x+2}\right)=P(-2)=3\cdot(-2)^4+5\cdot(-2)^3-(-2)-10=0$$

Para descomponerlo se plica Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -3 & 8 & 5 & -6 \\ 3 & & -9 & -3 & 6 \\ \hline & -3 & -1 & 2 & \underline{|0} \end{array} \quad -3x^3+8x^2+5x-6=\left(-3x^2-x+2\right)\cdot(x-3)$$

5. Hallar p para que sea exacta la división: $\left(x^2-2x+p\right):(x-3)$

Solución.

El parámetro p se calcula mediante el teorema del resto:

$$\text{Resto}\left(\frac{P(x)}{x-a}\right)=P(a)$$

$$\text{Resto}\left(\frac{x^2-2x+p}{x-3}\right)=P(3)$$

Si ls división es exacta, el resto es cero.

$$P(3)=0$$

$$3^2-2\cdot 3+p=0\ :\ p+3=0\ :\ p=-3$$

6. ¿Qué valor ha de tomar m para que: $x^5-8x^2+mx-6x^6+1$ sea divisible por $(x-4)$?

Solución.

Aplicando el teorema del resto se calcula el parámetro m. Que el polinomio sea divisible por el binomio $x-4$, indica que el resto de la división es cero.

$$\text{Resto}\left(\frac{P(x)}{x-a}\right)=P(a)$$

$$\text{Resto}\left(\frac{-6x^6+x^5-8x^2+mx+1}{x-4}\right)=P(4)$$

$$-6\cdot 4^6+4^5-8\cdot 4^2+m\cdot 4+1=0\ :\ 4m-23679=0\ :\ m=\frac{23679}{4}$$

7. Hallar K para que (-2) sea un cero del polinomio $x^2-3x^3+2Kx-4$

Solución.

Si -2 sea un cero del polinomio, el valor numérico el polinomio para $x=-2$ es cero. El ejercicio es identico a los anteriores del teorema del resto, solo cambia la forma de enunciarlo.

$$P(-2)=0$$

$$P(-2)=-3\cdot(-2)^3+(-2)^2+2K\cdot(-2)-4=0$$

$$24-4k=0\ :\ k=6$$

8. Calcula m para que al dividir $x^3 - x^2 + mx - 3$ por $x + 2$ el resto sea -1.

Solución.

Aplicando el teorema del resto se calcula el valor del parámetro m.

$$\text{Resto}\left(\frac{P(x)}{x-a}\right) = P(a)$$

$$\text{Resto}\left(\frac{x^3 - x^2 + mx - 3}{x+2}\right) = P(-2)$$

$$-1 = (-2)^3 - (-2)^2 + m(-2) - 3$$

$$-1 = -15 - 2m \ : \ 2m = -14 \ : \ m = -7$$

9. Calcula a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 15$ sea divisible por $(x-3)$ y por $(x-5)$. Factoriza el polinomio resultante.

Solución.

Aplicando dos veces el teorema del resto se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas (a, b). Divisible equivale a resto cero

$$\text{Resto}\left(\frac{x^3 + ax^2 + bx + 15}{x-3}\right) = P(3) \ : \ 0 = 3^3 + a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + 15$$

$$\text{Resto}\left(\frac{x^3 + ax^2 + bx + 15}{x-5}\right) = P(5) \ : \ 0 = 5^3 + a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + 15$$

Ordenando se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 9a + 3b = -42 \\ 25a + 5b = -140 \end{cases} : \begin{cases} 3a + b = -14 \\ 5a + b = -28 \end{cases}$$

Restando las ecuaciones se elimina b y se calcula a.

$$-2a = 14 \ : \ a = -7$$

Sustituyendo en la 1ª ecuación se calcula b

$$3\cdot(-7) + b = -14 \ : \ b = 7$$

El polinomio queda:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$$

Para descomponerlo se utiliza el método de Ruffini, pero se tiene en cuenta que 3 y 5 son raíces del polinomio.

$$P(x) = x^3 + 7x^2 - 7x + 15$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -7 & 7 & 15 \\
3 & & 3 & -12 & -15 \\
\hline
 & 1 & -4 & -5 & \boxed{0} \\
5 & & 5 & 5 & \\
\hline
 & 1 & 1 & \boxed{0} & \\
-1 & & -1 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$$P(x) = (x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+1)$$

10. Descomponer factorialmente los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $Q(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$

c) $R(x) = x^5 - 16x$

d) $S(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$

e) $T(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2$

Solución.

Para factorizar un polinomio se utilizará: factor común (en el caso de que el polinomio no tenga término independiente) expresiones notables, teorema del factor, resolución de ecuaciones de segundo grado, teorema de factor y fundamentalmente método de Ruffini.

a. $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -1 & 2 \\
1 & & 1 & -1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \boxed{0} & \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$$P(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

b. $Q(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 1 & -16 & -4 & 48 \\
2 & & 2 & 6 & -20 & -48 \\
\hline
 & 1 & 3 & -10 & -24 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & -2 & 24 & \\
\hline
 & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} & \\
3 & & 3 & 12 & & \\
\hline
 & 1 & 4 & \boxed{0} & & \\
-4 & & -4 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$$Q(x) = (x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)$$

c. $R(x) = x^5 - 16x = x\cdot\left(x^4 - 16\right) = x\cdot\left(x^4 - 4^2\right) = x\cdot\left(x^2 - 4\right)\cdot\left(x^2 + 4\right) = x\cdot\left(x^2 - 2^2\right)\cdot\left(x^2 + 4\right)$

$$R(x) = x\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(x^2+4\right)$$

d. $S(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -4 & -10 & 12 \\
1 & & 2 & -2 & -12 \\
\hline
 & 2 & -2 & -12 & \boxed{0} \\
-2 & & -4 & 12 & \\
\hline
 & 2 & -6 & \boxed{0} & \\
3 & & 6 & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$$S(x) = 2\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

e. $T(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2 = x^2\cdot\left(x^4 - 2x^2 + 3\right)$

$x^4 - 2x^2 + 3$ Polinomio irreducible

11. Hallar el M.C.D. y el m.c.m. de los siguientes grupos de polinomios.

a) x^3-1 ; x^2-x ; x^2-1

b) x^4-16 ; x^2-4

c) $5x-10$; $15x^2-60$; $3x^2-12x+12$

Solución.

Para calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de un conjunto de polinomios es necesario factorizar los polinomios.

M.C.D. ≡ Comunes elevados al menor exponente

m.c.m. ≡ Comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

a. $$\left.\begin{array}{r} x^3-1=(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right) \\ x^2-x=x\cdot(x-1) \\ x^2-1=(x+1)\cdot(x-1) \end{array}\right\} : \begin{cases} \text{M.C.D.}=(x-1) \\ \text{m.c.m.}=(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right) \end{cases}$$

b. $$\left.\begin{array}{r} x^4-16=(x+2)\cdot(x-2)\cdot\left(x^2+4\right) \\ x^2-4=(x+2)\cdot(x-2) \end{array}\right\} : \begin{cases} \text{M.C.D.}=(x+2)\cdot(x-2) \\ \text{m.c.m.}=(x+2)\cdot(x-2)\cdot\left(x^2+4\right) \end{cases}$$

c. $$\left.\begin{array}{r} 5x-10=5\cdot(x-2) \\ 15x^2-60=3\cdot5\cdot(x+2)\cdot(x-2) \\ 3x^2-12x+12=3\cdot(x-2)^2 \end{array}\right\} : \begin{cases} \text{M.C.D.}=(x-2) \\ \text{m.c.m.}=3\cdot5\cdot(x-2)^2\cdot(x+2) \end{cases}$$

12. Determinar a y b para que $(x-3)$ sea una raíz doble del polinomio x^3+ax^2+7x+b. Factoriza el polinomio resultante.

Solución.

Aplicando el método de Ruffini dos veces e igualando en cada caso el resto a cero se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{array}{r|cccl} & 1 & a & 7 & b \\ 3 & & 3 & 3a+9 & 9a+48 \\ \hline & 1 & a+3 & 3a+16 & \boxed{9a+b+48}=0 \\ 3 & & 3 & 3a+18 & \\ \hline & 1 & a+6 & \boxed{6a+34}=0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 9a+b=-48 \\ 6a=-34 \end{cases} : a=-\frac{17}{3} : b=3$$

13. Descomponer las siguientes expresiones en fracciones simples.

a) $\dfrac{5x+4}{x^2+x-2}$

b) $\dfrac{-x-5}{x^2-2x-3}$

c) $\dfrac{4x^2-3}{x^3-2x^2+x-2}$

Solución.

a. Se factoriza el denominador: $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

Se descompone en tantas fracciones como factores tenga el denominador, colocando como numerador de cada fracción un polinomio de un grado menor, en este caso por ser los factores del denominador de grado uno, en el numerador se ponen de grado cero, es decir, constantes.

$$\frac{5x+4}{x^2+x-2}=\frac{5x+4}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

Calculo de constantes: Se suman las fracciones y se igualan los numeradores.

$$\frac{5x+4}{(x+2)(x-1)}=\frac{A(x-1)}{x+2}+\frac{B(x+2)}{x-1}$$
$$5x+4=A(x-1)+B(x+2)$$
Se dan valores a x para calcular las constantes, empezando por las raíces del denominador.

- Para $x=-2$: $5\cdot(-2)+4=A(-2-1)+B(-2+2)$: $-6=-3A+B\cdot 0$: $A=2$
- Para $x=1$: $5\cdot 1+4=A(1-1)+B(1+2)$: $9=A\cdot 0+3B$: $B=3$

$$\frac{5x+4}{x^2+x-2}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-1}$$

b. Se factoriza el denominador: $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$
$$\frac{-x-5}{x^2-2x-3}=\frac{-x-5}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$
Igualamos los numeradores.
$$-x-5=A(x-3)+B(x+1)$$
Se dan valores a x para calcular las constantes, empezando por las raíces del denominador.

- $x=3$: $-3-5=A(3-3)+B(3+1)$; $-8=A\cdot 0+B\cdot 4$; $B=-2$
- $x=-1$: $-(-1)-5=A(-1-3)+B(-1+1)$: $-4=A\cdot(-4)+B\cdot 0$; $A=1$

$$\frac{-x-5}{x^2-2x-3}=\frac{1}{x+1}+\frac{-4}{x-3}$$

c. Se factoriza el denominador: $x^3-2x^2+x-2=(x-2)\cdot(x^2+1)$

Para descomponer en fracciones recordar que en el numerador hay que poner un polinomio de un grado menor (en el numerador de x^2+1 se pone Mx + n).
$$\frac{4x^2-1}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{4x^2-3}{(x-2)\cdot(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Mx+n}{x^2+1}=\frac{A\cdot(x^2+1)+(Mx+n)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x^2+1)}$$

Igualamos los numeradores.
$$4x^2-1=A\cdot(x^2+1)+(Mx+n)\cdot(x-2)$$
Se dan valores a x para calcular las constantes, empezando por las raíces del denominador, en este caso como solo hay una raíz, se deberán elegir dos valores cualquiera, buscando siempre lo más sencillo (0, 1).

- $x=2$: $4\cdot 2^2-1=A\cdot(2^2+1)+(M\cdot 2+n)\cdot(2-2)$; $15=A\cdot 5+(2M+n)\cdot 0$: $A=3$
- $x=0$: $4\cdot 0^2-1=3\cdot(0^2+1)+(M\cdot 0+n)\cdot(0-2)$; $-1=3-2n$; $n=2$
- $x=1$: $4\cdot 1^2-1=3\cdot(1^2+1)+(M\cdot 1+2)\cdot(1-2)$; $3=6-M-2$: $M=1$

$$\frac{4x^2-1}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{3}{x-2}+\frac{x+2}{x^2+1}$$

14. Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{4}{x^2+2x+1}-\frac{x+3}{x^2-x}$

b) $\frac{x-2}{x^2+2x-3}+\frac{2x}{x+3}-\frac{4}{x^2-1}$

c) $\frac{x-2}{x+3}\div\frac{x^2-2x}{x^2+6x+9}$

d) $\left(\frac{4x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x+1}{x-1}$

e) $\left(1+\frac{a}{b}\right)\div\left(\frac{a^2-b^2}{ab-b^2}\right)$

f) $\left(\dfrac{1}{x^3+x^2+x+1}-\dfrac{2-x}{1-x^4}\right)\div\dfrac{x}{1-x^2}$

g) $\dfrac{x-x^2}{1-x^2}+\dfrac{1+x}{1+2x+x^2}-\dfrac{1-2x}{1+x}$

h) $\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\div\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$

i) $\left(\dfrac{\frac{a}{x}+\frac{x}{a}}{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}+\dfrac{1}{1+\frac{x}{a}}-\dfrac{1}{1-\frac{x}{a}}\right)\div\dfrac{1-\dfrac{a-3x}{a+x}}{\dfrac{3a+x}{a-x}-3}$

Solución.

a. Se factorizan los denominadores para obtener el mínimo común múltiplo.

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{4}{x^2+2x+1}-\frac{x+3}{x^2-x}=\frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)}+\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{x+3}{x\cdot(x-1)}=$$

$$=\left\{\text{m.c.m.}\begin{pmatrix}(x+1)(x-1)\\(x+1)^2\\x\cdot(x-1)\end{pmatrix}=x(x+1)^2(x-1)\right\}=\frac{1\cdot x\cdot(x+1)+4\cdot x\cdot(x-1)-(x+3)\cdot(x+1)^2}{x(x+1)^2(x-1)}=$$

$$=\frac{x^2+x+4x^2-4x-(x+3)\cdot(x^2+2x+1)}{x(x+1)^2(x-1)}=\frac{5x^2-3x-(x^3+2x^2+x+3x^2+6x+3)}{x(x+1)^2(x-1)}=$$

$$=\frac{-x^3-10x-3}{x(x+1)^2(x-1)}=-\frac{x^3+10x+3}{x(x+1)^2(x-1)}$$

b. $\dfrac{x-2}{x^2+2x-3}+\dfrac{2x}{x+3}-\dfrac{4}{x^2-1}=\dfrac{x-2}{(x+3)(x-1)}+\dfrac{2x}{x+3}-\dfrac{4}{(x+1)(x-1)}=$

$$=\left\{\text{m.c.m.}\begin{pmatrix}(x+3)(x-1)\\x+3\\(x+1)(x-1)\end{pmatrix}=(x+3)(x+1)(x-1)\right\}=\frac{(x-2)(x+1)+2x(x+1)(x-1)-4(x+3)}{(x+3)(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{x^2+x-2x-2+2x(x^2-1)-4x-12}{(x+3)(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-x-2+2x^3-2x-4x-12}{(x+3)(x+1)(x-1)}=\frac{2x^3+x^2-7x-14}{(x+3)(x+1)(x-1)}$$

c. $\dfrac{x-2}{x+3}\div\dfrac{x^2-2x}{x^2+6x+9}$ Se factoriza, se opera en cruz y se simplifica.

$$\frac{x-2}{x+3}\div\frac{x^2-2x}{x^2+6x+9}=\frac{x-2}{x+3}:\frac{x(x-2)}{(x+3)^2}=\frac{(x-2)(x+3)^2}{(x+3)x(x-2)}=\frac{x+3}{x}$$

d. $\left(\dfrac{4x}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$ Primero se opera el paréntesis y a continuación el producto.

$$\left(\frac{4x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x+1}{x-1}=\left(\frac{4x}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{4x-2(x+1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{x-1}=$$

$$=\frac{4x-2x-2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x-1}=$$

$$=\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x-1}$$

e. $\left(1+\frac{a}{b}\right)\div\left(\frac{a^2-b^2}{ab-b^2}\right)$ Primero se operan los paréntesis y a continuación se divide.

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\div\left(\frac{a^2-b^2}{ab-b^2}\right)=\frac{b+a}{b}\div\frac{(a-b)(a+b)}{b(a-b)}=\frac{b+a}{b}\div\frac{a+b}{b}=\frac{(b+a)b}{b(a+b)}=1$$

f. $\left(\frac{1}{x^3+x^2+x+1}-\frac{2-x}{1-x^4}\right)\div\frac{x}{1-x^2}$ Para facilitar los cálculos empezamos por cambiar el signo a los factores de la segunda fracción del paréntesis, a continuación se factorizan los denominadores empleando Ruffini y expresiones notables y por último se opera y simplifica.

$$\left(\frac{1}{x^3+x^2+x+1}-\frac{2-x}{1-x^4}\right)\div\frac{x}{1-x^2}=\left(\frac{1}{x^3+x^2+x+1}-\frac{x-2}{x^4-1}\right)\div\frac{x}{1-x^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}-\frac{x-2}{(x^2-1)(x^2+1)}\right)\div\frac{x}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\left(\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}-\frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\right)\div\frac{x}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\frac{1(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\div\frac{x}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\div\frac{x}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\frac{1(1-x)(1+x)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)x}=\frac{1-x}{(x-1)(x^2+1)x}=\frac{-(x-1)}{(x-1)(x^2+1)x}=\frac{1}{(x^2+1)x}$$

g. $$\frac{x-x^2}{1-x^2}+\frac{1+x}{1+2x+x^2}-\frac{1-2x}{1+x}=\frac{x(1-x)}{(1-x)(1+x)}+\frac{1+x}{(1+x)^2}-\frac{1-2x}{1+x}=$$

$$=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1-2x}{1+x}=\frac{x+1-(1-2x)}{1+x}=\frac{x+1-1+2x}{1+x}=\frac{3x}{1+x}$$

h. $$\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\div\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{x(x+1)-1(x-1)}{(x-1)(x+1)}\div\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+x-x+1}{(x-1)(x+1)}\div\frac{x}{x+1}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\div\frac{x}{x+1}=\frac{(x^2+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)x}=\frac{x^2+1}{(x-1)x}$$

i. $$\left(\frac{\frac{a}{x}+\frac{x}{a}}{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}+\frac{1}{1+\frac{x}{a}}-\frac{1}{1-\frac{x}{a}}\right)\div\frac{1-\frac{a-3x}{a+x}}{\frac{3a+x}{a-x}-3}=\left(\frac{\frac{a^2+x^2}{ax}}{\frac{a^2-x^2}{ax}}+\frac{1}{\frac{a+x}{a}}-\frac{1}{\frac{a-x}{a}}\right)\div\frac{\frac{1(a+x)-(a-3x)}{a+x}}{\frac{3a+x-3(a-x)}{a-x}}=$$

$$=\left(\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}+\frac{a}{a+x}-\frac{a}{a-x}\right)\div\frac{\frac{a+x-a+3x}{a+x}}{\frac{3a+x-3a+3x}{a-x}}=\left(\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}+\frac{a}{a+x}-\frac{a}{a-x}\right)\div\frac{\frac{a+x-a+3x}{a+x}}{\frac{3a+x-3a+3x}{a-x}}=$$

$$=\left(\frac{a^2+x^2}{(a+x)(a-x)}+\frac{a}{a+x}-\frac{a}{a-x}\right)\div\frac{\frac{4x}{a+x}}{\frac{4x}{a-x}}=\frac{a^2+x^2+a(a-x)-a(a+x)}{(a+x)(a-x)}\div\frac{a-x}{a+x}=$$

$$=\frac{a^2+x^2+a^2-ax-a^2-ax}{(a+x)(a-x)}\div\frac{a-x}{a+x}=\frac{a^2-2ax+x^2}{(a+x)(a-x)}\div\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a-x)^2}{(a+x)(a-x)}\div\frac{a-x}{a+x}=$$

$$=\frac{a-x}{a+x}\div\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a-x)(a+x)}{(a+x)(a-x)}=1$$

2.S.

1. Averiguar los valores reales que verifican las siguientes condiciones:

a. $|x-2| \le 2$

b. $\left|x+\frac{1}{2}\right| = 5$

c. $|2x+3| \ge 6$

Solución.

El valor absoluto convierte cualquier expresión en positiva. Para eliminar el valor absoluto de una ecuación habrá que tener en cuenta que la expresión bajo él puede ser positiva ó negativa, lo cuál se consigue añadiendo un doble signo y resolviendo indistintamente para cada uno.

a. $$|x-2| \le 2 : \ \pm(x-2) \le 2 : \begin{cases} (+): x-2 \le 2 : \ x \le 4 \\ (-): -x+2 \le 2 : \ -x \le 0 : x \ge 0 \end{cases} : \ x \in [0, 4]$$

b. $$\left|x+\frac{1}{2}\right| = 5 : \ \pm\left(x+\frac{1}{2}\right) = 5 : \begin{cases} (+): x+\frac{1}{2} = 5 : \ x = \frac{9}{2} \\ (-): -x-\frac{1}{2} = 5 : \ -x = \frac{11}{2} : \ x = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

c. $$|2x+3| \ge 6 : \ \pm(2x+3) \ge 6 : \begin{cases} (+): 2x+3 \ge 6 : \ x \ge \frac{3}{2} \\ (-): -2x-3 \ge 6 : \ -x \ge \frac{9}{2} : \ x \le -\frac{9}{2} \end{cases} : \ x \in \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

2. Expresar en forma de valor absoluto los siguientes intervalos:

a. $(-3, 5)$

b. $(-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$

Solución.

Para expresar un intervalo mediante valor absoluto, se busca el punto medio del intervalo y el radio del intervalo (diferencia en valor absoluto entre el punto medio y cualquiera de los extremos).

a. $(-3, 5)$ Punto medio $= \frac{-3+5}{2} = 1$. Radio $= |1-5| = |1-(-3)| = 4$

$$|x-1| < 4$$

b. $(-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$ Punto medio $= \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$. Radio $= \left|\frac{7}{2}-5\right| = \left|\frac{7}{2}-2\right| = \frac{3}{2}$

$$\left|x-\frac{7}{2}\right| \ge \frac{3}{2}$$

3. Calcular:

a. $\sqrt[3]{16}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\frac{54}{8}}$

b. $\sqrt{\frac{2a}{b}}-\sqrt{\frac{2b}{a}}+\sqrt{\frac{1}{2ab}}$

c. $\sqrt{(x+2)^3}-\sqrt{4x+8}-\sqrt{x^3+2x^2}$

d. $\sqrt{a^2m-a^2n}+\sqrt[4]{(m-n)^2\cdot b^4}+\sqrt[6]{c^6\cdot(m-n)^3}$

e. $\frac{b}{0{,}3}\sqrt{\frac{0{,}18a}{b^2}}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{18b^2}{a}}+2c\sqrt{\frac{2a}{c^2}}-\frac{2}{9c^2}\sqrt{\frac{a^3\cdot c^4}{0{,}125}}$

Solución.

Se factoriza los radicándoos en busca de un radical común ya que solo se puede sumar y restar radicales idénticos. Si es necesario se racionaliza para obtener el radical común.

a. $$\sqrt[3]{16}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\frac{54}{8}}=\sqrt[3]{2^4}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\frac{2\cdot3^3}{2^3}}=\sqrt[3]{2\cdot2^3}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}=$$
$$=\sqrt[3]{2}\cdot\left(2+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{6}\sqrt[3]{2}$$

b. $$\sqrt{\frac{2a}{b}}-\sqrt{\frac{2b}{a}}+\sqrt{\frac{1}{2ab}}=\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{2ab}}=\frac{\sqrt{2a}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{2b}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}+\frac{1\cdot\sqrt{2ab}}{\sqrt{2ab}\cdot\sqrt{2ab}}=$$
$$=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{b^2}}-\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{a^2}}+\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{(2ab)^2}}=\frac{\sqrt{2ab}}{b}-\frac{\sqrt{2ab}}{a}+\frac{\sqrt{2ab}}{2ab}=\sqrt{2ab}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{2ab}\right)=\sqrt{2ab}\,\frac{2a-2b+1}{2ab}$$

c. $$\sqrt{(x+2)^3}-\sqrt{4x+8}-\sqrt{x^3+2x^2}=\sqrt{(x+2)^2(x+2)}-\sqrt{4(x+2)}-\sqrt{x^2(x+2)}=$$
$$=(x+2)\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+2}-x\sqrt{x+2}=\sqrt{x+2}(x+2-2-x)=0\sqrt{x+2}=0$$

d. $$\sqrt{a^2m-a^2n}+\sqrt[4]{(m-n)^2\cdot b^4}+\sqrt[6]{c^6\cdot(m-n)^3}=\sqrt{a^2(m-n)}+\sqrt[4]{\left((m-n)b^2\right)^2}+\sqrt[6]{\left(c^2\cdot(m-n)\right)^3}=$$
$$=a\sqrt{m-n}+\sqrt{(m-n)b^2}+\sqrt{c^2\cdot(m-n)}=a\sqrt{m-n}+b\sqrt{m-n}+c\sqrt{m-n}=(a+b+c)\sqrt{m-n}$$

e. $$\frac{b}{0{,}3}\sqrt{\frac{0{,}18a}{b^2}}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{18b^2}{a}}+2c\sqrt{\frac{2a}{c^2}}-\frac{2}{9c^2}\sqrt{\frac{a^3\cdot c^4}{0{,}125}}=$$
$$=\frac{b}{3/10}\sqrt{\frac{18a}{100b^2}}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{18b^2}{a}}+2c\sqrt{\frac{2a}{c^2}}-\frac{2}{9c^2}\sqrt{\frac{a^3\cdot c^4}{1/8}}=$$
$$=\frac{10b}{3}\frac{\sqrt{2\cdot3^2a}}{\sqrt{10^2b^2}}+\frac{\sqrt{2\cdot3^2b^2}}{\sqrt{a}}+2c\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{c^2}}-\frac{2}{9c^2}\sqrt{2\cdot2^2a\cdot a^2\cdot(c^2)^2}=$$
$$=\frac{10b}{3}\frac{3\sqrt{2a}}{10b}+\frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}+2c\frac{\sqrt{2a}}{c}-\frac{2}{9c^2}2ac^2\sqrt{2a}=\sqrt{2a}+\frac{3\sqrt{2a}}{a}+2\sqrt{2a}-\frac{4a}{9}\sqrt{2a}=$$
$$=\left(1+\frac{3}{a}+2-\frac{4a}{9}\right)\sqrt{2a}=\frac{9a+27+18a-4a^2}{9a}\sqrt{2a}=\frac{27+27a-4a^2}{9a}\sqrt{2a}$$

4. Calcular:

a. $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt{\sqrt[3]{4}}$

b. $3\sqrt{3\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{3^3}}}$

c. $\sqrt[3]{\frac{2}{b}\sqrt{\frac{b}{2}}}$

Solución.

Para introducir un factor dentro de un radical, se eleva el factor al índice del radical.

a. $$\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 3}}}{\sqrt[2\times 3]{4}} = \frac{\sqrt[3\times 2]{12}}{\sqrt[6]{4}} = \frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[6]{4}} = \sqrt[6]{\frac{12}{4}} = \sqrt[6]{3}$$

b. $$3\sqrt{3\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{3^3}}} = 3\sqrt{3\sqrt{\sqrt{\frac{1}{3^2}\cdot 3^3}}} = 3\sqrt{3\,\sqrt[2\times 2]{3}} = 3\sqrt{3\sqrt[4]{3}} = 3\sqrt{\sqrt[4]{3^4\cdot 3}} = 3\,\sqrt[2\times 4]{3^5} = 3\sqrt[8]{3^5}$$

c. $$\sqrt[3]{\frac{2}{b}\sqrt{\frac{b}{2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{2}{b}\right)^2\frac{b}{2}}} = \sqrt[3\times 2]{\frac{2^2\cdot b}{b^2\cdot 2}} = \sqrt[6]{\frac{2}{b}} = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{b}} = \frac{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{b^5}}{\sqrt[6]{b}\cdot\sqrt[6]{b^5}} = \frac{\sqrt[6]{2\cdot b^5}}{\sqrt[6]{b^6}} = \frac{\sqrt[6]{2\cdot b^5}}{b}$$

5. Racionalizar: $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Solución.

Se multiplica y divide por el conjugado del denominador $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

$$\frac{\left(\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2\cdot 2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{9}+\sqrt{6}+4\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{4\cdot 3-2} =$$

$$= \frac{2\cdot 3+\sqrt{6}+4\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{10} = \frac{6+\sqrt{6}+4\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{10}$$

6. Racionalizar: $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+2}$

Solución.

Se multiplica y divide por el conjugado del denominador $\left(3\sqrt{2}-2\right)$.

$$\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+2} = \frac{\left(3\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}-2\right)}{\left(3\sqrt{2}+2\right)\cdot\left(3\sqrt{2}-2\right)} = \frac{3\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}-3\sqrt{6}\cdot 2+2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}-2\sqrt{2}\cdot 2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-2^2} =$$

$$= \frac{9\sqrt{12}-6\sqrt{6}+6\sqrt{4}-4\sqrt{2}}{9\cdot 2-4} = \frac{9\sqrt{2^2\cdot 3}-6\sqrt{6}+6\sqrt{2^2}-4\sqrt{2}}{18-4} = \frac{9\cdot 2\sqrt{3}-6\sqrt{6}+6\cdot 2-4\sqrt{2}}{14} =$$

$$= \frac{18\sqrt{3}-6\sqrt{6}+12-4\sqrt{2}}{14} = \frac{2\left(9\sqrt{3}-3\sqrt{6}+6-2\sqrt{2}\right)}{14} = \frac{6-2\sqrt{2}-3\sqrt{6}+9\sqrt{3}}{7}$$

7. Racionalizar: $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

Solución.

Se multiplica y divide por el conjugado del denominador $\left(3\sqrt{2}+2\right)$.

$$\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2+2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2}{3^2\left(\sqrt{2}\right)^2-2^2\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$=\frac{3^2\left(\sqrt{2}\right)^2+12\sqrt{2\cdot 3}+2^2\left(\sqrt{3}\right)^2}{9\cdot 2-4\cdot 3}=\frac{9\cdot 2+12\sqrt{6}+4\cdot 3}{18-12}=\frac{30+12\sqrt{6}}{6}=\frac{6\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)}{6}=5+2\sqrt{6}$$

8. Racionalizar: $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

Solución.

Se multiplica y divide por el denominador $\left(\sqrt{18}\right)$.

$$\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\frac{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{18}}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{18}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}}{\left(\sqrt{18}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3\cdot 18}-\sqrt{2\cdot 18}}{18}=\frac{2\sqrt{54}-\sqrt{36}}{18}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2\cdot 3^3}-6}{18}=\frac{2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}-6}{18}=\frac{6\sqrt{6}-6}{18}=\frac{6\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)}{18}=\frac{\sqrt{6}-1}{3}$$

9. Racionalizar: $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

Solución.

Se multiplica y divide por el denominador $\left(\sqrt{12}\right)$.

$$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=\frac{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{12}}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}}{\left(\sqrt{12}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3\cdot 12}+\sqrt{2\cdot 12}}{12}=\frac{2\sqrt{36}+\sqrt{24}}{12}=$$

$$=\frac{2\cdot 6+\sqrt{2^3\cdot 3}}{12}=\frac{12+2\sqrt{2\cdot 3}}{12}=\frac{2\cdot\left(6+\sqrt{6}\right)}{12}=\frac{6+\sqrt{6}}{6}$$

10. Racionalizar: $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

Solución.

Se multiplica y divide por el conjugado del denominador $\left(3\sqrt{2}-2\right)$.

$$\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}=\frac{\left(3\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{3}-2\right)}{\left(3\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(3\sqrt{3}-2\right)}=\frac{3\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{3}-3\sqrt{6}\cdot 2+2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}-2\cdot 2\sqrt{2}}{\left(3\sqrt{3}\right)^2-2^2}=$$

$$=\frac{9\sqrt{6\cdot 3}-6\sqrt{6}+6\sqrt{2\cdot 3}-4\sqrt{2}}{3^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2-4}=\frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{9\cdot 3-4}=\frac{9\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{27-4}=$$

$$=\frac{9\cdot 3\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{23\sqrt{2}}{23}=\sqrt{2}$$

11. Racionalizar: $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+4}+\dfrac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

Solución.

Primero se racionaliza y luego se suma. Para racionalizar se multiplica y divide cada fracción por el conjugado del denominador.

$$\frac{11}{2\sqrt{5}+4}+\frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{11\cdot\left(2\sqrt{5}-4\right)}{\left(2\sqrt{5}+4\right)\cdot\left(2\sqrt{5}-4\right)}+\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)}=\frac{11\cdot 2\sqrt{5}-11\cdot 4}{\left(2\sqrt{5}\right)^2-4^2}+\frac{1\cdot 3-1\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}\cdot 3+\left(\sqrt{5}\right)^2}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{22\sqrt{5}-44}{2^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2-16}+\frac{3-\sqrt{5}-3\sqrt{5}+5}{9-5}=\frac{22\sqrt{5}-44}{4\cdot 5-16}+\frac{3-\sqrt{5}-3\sqrt{5}+5}{4}=\frac{22\sqrt{5}-44}{4}+\frac{8-4\sqrt{5}}{4}=$$

$$=\frac{22\sqrt{5}-44+8-4\sqrt{5}}{4}=\frac{18\sqrt{5}-36}{4}=\frac{18\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}=\frac{9\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

12. Opera y simplifica: $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Solución.

En este caso, los denominadores de las fracciones son conjugados entre si, por lo tanto, si se suman las fracciones se eliminan los radicales del denominador y la expresión queda racionalizada.

$$\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-2\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

13. Opera y simplifica: $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

Al igual que en el anterior, los denominadores de las fracciones son conjugados entre si, por lo tanto, si se suman las fracciones se eliminan los radicales del denominador y la expresión queda racionalizada.

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{7}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\left(\sqrt{7}\right)^2+2\sqrt{7}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2\right)}{7-5}=\frac{7-2\sqrt{7\cdot5}+5-\left(7+2\sqrt{7\cdot5}+5\right)}{2}=\frac{-4\sqrt{35}}{2}=$$

$$=-2\sqrt{35}$$

14. Opera y simplifica: $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}$

Solución.

Primero se operan los denominadores:

$$\frac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}+\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}=\frac{1}{\dfrac{1\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\dfrac{1\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}=\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}+\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{1}+\frac{1-\sqrt{3}}{1}=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2$$

15. Racionalizar: $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

Solución.

Se multiplica y divide por el conjugado del denominador $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$.

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2}{a-b}=\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}$$

16. Racionalizar: $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

Solución.

Se multiplica y divide por el conjugado del denominador $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$.

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x+y)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=\frac{(x+y)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{(x+y)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-y}$$

17. Racionalizar y simplificar: $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}$

Solución.

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(b\sqrt{a}+a\sqrt{b}\right)}{\left(b\sqrt{a}-a\sqrt{b}\right)\cdot\left(b\sqrt{a}+a\sqrt{b}\right)}=\frac{b\sqrt{a^2}+a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}+a\sqrt{b^2}}{\left(b\sqrt{a}\right)^2-\left(a\sqrt{b}\right)^2}=$$

$$\frac{ab+(a+b)\sqrt{ab}+ab}{ab^2-a^2b}=\frac{2ab+(a+b)\sqrt{ab}}{ab(b-a)}$$

NUMEROS COMPLEXOS

1. Hallar "a" para que el complejo $\frac{3+2i}{a+6i}$:

a) sea real puro
b) sea imaginario puro

Solución.

Lo primero de todo es hacer la división en forma binómica, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, de esta forma se elimina la unidad imaginaria del denominador.

$$\frac{3+2i}{a+6i}=\frac{(3+2i)\cdot(a-6i)}{(a+6i)\cdot(a-6i)}=\frac{\left(3\cdot a+2\cdot(-6)i^2\right)+\left(3\cdot(-6)+2\cdot a\right)i}{a^2-6^2i^2}=\frac{(3a+12)+(2a-18)i}{a^2+36}=\frac{3a+12}{a^2+36}+\frac{2a-18}{a^2+36}i$$

a) Número complejo real puro $\Leftrightarrow$ la parte imaginaria nula.

$$\frac{2a-18}{a^2+36}=0\quad:\quad 2a-18=0\quad:\quad a=\frac{18}{2}=9$$

b) Número complejo imaginario puro $\Leftrightarrow$ la parte real nula.

$$\frac{3a+12}{a^2+36}=0\quad:\quad 3a+12=0\quad:\quad a=\frac{-12}{3}=-4$$

2. Hallar el valor de k para que el complejo $\frac{2-(1+k)i}{1-ki}$ sea un nº real. Hallar su cociente.

Solución.

Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{2-(1+k)i}{1-ki}=\frac{(2-(1+k)i)\cdot(1+k\,i)}{(1-k\,i)\cdot(1+k\,i)}=\frac{\left(2\cdot 1+(-(1+k))\cdot k\,i^2\right)+\left(2\cdot k+(-(1+k))\cdot 1\right)i}{1^2-k^2i^2}=\frac{\left(2+k+k^2\right)+(k-1)i}{1+k^2}=$$

$$=\frac{2+k+k^2}{1+k^2}+\frac{k-1}{1+k^2}i$$

Para que un número complejo sea real puro, la parte imaginaria debe ser nula.

$$\frac{k-1}{1+k^2}=0\quad:\quad k-1=0\quad:\quad k=1$$

Para k = 1:

$$=\frac{2+1+1^2}{1+1^2}+\frac{1-1}{1+1^2}i=\frac{3}{2}+0\,i$$

3. Hallar a y b para que el complejo $\frac{a+2i}{3+bi}$ sea igual $\sqrt{2}_{315}$

Solución.

$$\frac{a+2i}{3+bi}=\sqrt{2}_{315}$$

Lo primero es expresar el segundo miembro de la igualdad en forma binómica.

$$\sqrt{2}_{315}=\sqrt{2}\cdot(\cos 315+i\,\text{sen}\,315)=\left\{\begin{array}{l}\cos 315=\cos(-45)=\cos 45=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \text{sen}\,315=\text{sen}\,(-45)=-\text{sen}\,45=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1-i$$

$$\frac{a+2i}{3+bi}=1-i$$

Los parámetros a y b se calculan por identificación igualando las partes reales y las imaginarias, para lo cual lo más sencillo es pasar el denominador al segundo miembro y operar el producto.

$$a+2i=(1-i)\cdot(3+bi)$$

$$a + 2i = \left(1\cdot 3 + (-1)\cdot b\, i^2\right) + \left(1\cdot b + (-1)\cdot 3\right) i$$

$$a + 2i = (3 + b) + (b - 3) i : \begin{cases} \text{Re}: a = 3 + b \\ \text{Im}: 2 = b - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \end{cases}$$

Otra forma mucho más complicada es operar tal como esta, el primer miembro de la igualdad se pasa a forma binómica multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador $(3 - bi)$.

$$\frac{a + 2i}{3 + bi} = \frac{(a + 2i)\cdot(3 - bi)}{(3 + bi)\cdot(3 - bi)} = \frac{3a - 2bi^2 + 6i - abi}{3^2 - b^2 i^2} = \left\{ i^2 = -1 \right\} = \frac{(3a + 2b) + (6 - ab)i}{9 + b^2} = \frac{3a + 2b}{9 + b^2} + \frac{6 - ab}{9 + b^2} i$$

El segundo miembro de la ecuación se pasa a forma binómico mediante la forma trigonométrica.

Igualando.

$$\frac{3a + 2b}{9 + b^2} + \frac{6 - ab}{9 + b^2} i = 1 - i$$

Identificando parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas no lineal, que se resuelve por el método de sustitución.

$$\begin{cases} \text{Re}: \dfrac{3a + 2b}{9 + b^2} = 1 \\ \text{Im}: \dfrac{6 - ab}{9 + b^2} = -1 \end{cases}$$

Ordenando.

$$\begin{cases} 3a + 2b = 9 + b^2 \\ 6 - ab = -9 - b^2 \end{cases}$$

De la 2ª ecuación se despeja "a" y se sustituye en la primera.

$$a = \frac{b^2 + 15}{b}$$

$$3\frac{b^2 + 15}{b} + 2b = 9 + b^2 \qquad 3b^2 + 45 + 2b^2 = 9b + b^3 \qquad b^3 - 5b^2 + 9b - 45 = 0$$

Resolviendo por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 9 & -45 \\ 5 & & 5 & 0 & 45 \\ \hline & 1 & 0 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

$$b = 5$$

$$a = \frac{5^2 + 15}{5} = 8$$

4. Hallar dos números complejos cuya diferencia es imaginaria, su suma tiene como parte imaginaria 5 y su producto vale $-5 + 5i$.

Solución.

Se pide hallar dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ que cumplan las siguientes condiciones:

1. $\text{Re}\,(z_1 - z_2) = 0$

$$z_1 - z_2 = a + bi - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$
$$\text{Re}\,(z_1 - z_2) = a - c = 0$$

2. $\text{Im}\,(z_1 + z_2) = 5$

$$z_1 + z_2 = a + bi + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$\text{Im}\,(z_1 + z_2) = b + d = 5$$

3. $z_1 \cdot z_2 = -5 + 5i$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i = -5 + 5i$$

$$\begin{cases} \text{Re} : a \cdot c - b \cdot d = -5 \\ \text{Im} : a \cdot d + b \cdot c = 5 \end{cases}$$

Las condiciones propuestas permiten plantear un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b + d = 5 \\ ac - bd = -5 \\ ad + bc = 5 \end{cases} \quad a = c \quad \begin{cases} b + d = 5 \\ a^2 - bd = -5 \\ ad + ba = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} b + d = 5 \\ a^2 - bd = -5 \\ a(b + d) = 5 \end{cases}$$

Sustituyendo la 1ª en la 3ª:

$$a \cdot 5 = 5 \qquad a = c = 1$$

$$\begin{cases} b + d = 5 \\ 1^2 - bd = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + d = 5 \\ bd = 6 \end{cases}$$

Por sustitución

$$d = 5 - b \qquad b \cdot (5 - b) = 6$$

Ordenando se obtiene una ecuación de 2º grado.

$$b^2 - 5b + 6 = 0 : \begin{cases} b = 1 \rightarrow d = 5 - 1 = 4 \\ b = 5 \rightarrow d = 5 - 5 = 0 \end{cases}$$

Posibles soluciones:

$$z_1 = 1 + i \text{ y } z_2 = 1 + 4i$$

ó

$$z_1 = 1 + 5i \text{ y } z_2 = 1 + 0i$$

5. Hallar dos nº complejos tales que su suma sea $1 + 2i$, el cociente de ambos real puro y la parte real del 1º sea igual a 2.

Solución.

Se buscan dos números complejos de la forma:

$$Z_1 = 2 + ai$$
$$Z_2 = b + di$$

Tales que:

$$Z_1 + Z_2 = 1 + 2i$$

$$(2 + ai) + (b + di) = 1 + 2i$$

$$(2 + b) + (a + d)i = 1 + 2i$$

Igualando real con real e imaginaria con imaginaria

$$\begin{cases} \text{Re} : 2 + b = 1 \Rightarrow b = -1 \\ \text{Im} : a + d = 2 \end{cases}$$

Con lo obtenido hasta ahora nos quedan los complejos $Z_1 = 2 + ai$ y $Z_2 = -1 + di$ y la relación entre los parámetros a y d $(a + d = 2)$.

La segunda relación entre a y d que nos permita plantear un sistema se obtiene del cociente entre Z_1 y Z_2, que haremos en forma binómica, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, para eliminar la unidad imaginaria del denominador.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2 + ai}{-1 + di} = \frac{(2 + ai) \cdot (-1 - di)}{(-1 + di) \cdot (-1 - di)} = \frac{\left(2 \cdot (-1) + a \cdot (-d)i^2\right) + \left(2 \cdot (-d) + a \cdot -1\right)i}{(-1)^2 - d^2 i^2} = \frac{-2 + ad}{1 + d^2} + \frac{-2d - a}{1 + d^2} i$$

Como el cociente es un número real puro, la parte imaginaria debe ser nula.

$$\frac{-2d - a}{1 + d^2} = 0 \Rightarrow -2d - a = 0$$

Con las dos expresiones obtenidas se plantea un sistema que permite calcular los parámetros a y d.

$$\begin{cases} a + d = 2 \\ -2d - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ d = -2 \end{cases}$$

Los números pedidos son

$$Z_1 = 2 + 4ai$$
$$Z_2 = -1 - 2i$$

6. Determine un número complejo cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

Solución.

Se pide calcular un número complejo de la forma a + bi que cumpla:

$$(a + bi)^2 = a - bi$$

Desarrollando el cuadrado e igualando parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria se obtiene un sistema de ecuaciones que nos permite calcular a y b.

$$a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a - bi$$

Ordenando el primer miembro:

$$\left(a^2 - b^2\right) + 2abi = a - bi$$

Igualando parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria:

$$\begin{cases} \mathrm{Re} : a^2 - b^2 = a \\ \mathrm{Im} : 2ab = -b \end{cases}$$

De la igualdad de las partes imaginarias simplificando b se obtiene:

$$2a = -1 \qquad a = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo el valor de a en la 1ª igualdad se calcula b

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b^2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Los posibles números complejos que cumplen la relación pedida son:

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad \text{ó} \qquad z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

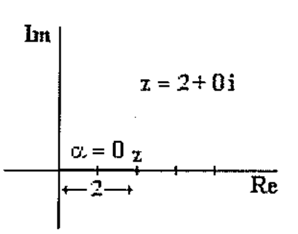
7. Expresar en forma polar los siguientes nº complejos:

a) 2
b) -5
c) i
d) $-2 + 2\sqrt{3}\, i$
e) $\sqrt{3} - i$

Solución.

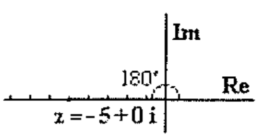
a) $z = 2$. Numero complejo real puro positivo, con dibujarlo basta para obtener su forma polar.

$$Z = 2 = 2 + 0i = 2_{0^\circ}$$



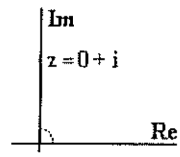
b) $z = -5$. Numero complejo real puro negativo.

$$Z = -5 + 0i = 5_{180^\circ}$$



c) z = i. Numero complejo imaginario puro.

$$Z = 0 + i = 1_{90^\circ}$$



d) $Z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$

$$Z \in 2^\circ \text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4 \\ \text{Argumento}: \alpha = 180 - \text{arctg}\left|\dfrac{2\sqrt{3}}{-2}\right| = 180 - \text{arctg}\sqrt{3} = 120 \end{array} \right\} : Z = 4_{120^\circ}$$

e) $Z = \sqrt{3} - i$

$$Z \in 4^\circ \text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{Argumento}: \alpha = 360 - \text{arctg}\left|\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right| = 360 - \text{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 330 \end{array} \right\} : Z = 2_{330^\circ}$$

8. Expresar en forma binómica los siguientes complejos:

a) 3_{180°
b) 6_{30°
c) 2_{270°
d) $\sqrt{2}_{45^\circ}$

Solución.

a) $Z = 3_{180^\circ} = 3\cdot(\cos 180^\circ + i \text{ sen } 180^\circ) = 3\cdot(-1 + 0i) = -3$

b) $Z = 6_{30^\circ} = 6\cdot(\cos 30^\circ + i \text{ sen } 30^\circ) = 3\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

c) $Z = 2_{270^\circ} = 2\cdot(\cos 270^\circ + i \text{ sen } 270^\circ) = 2\cdot(0 + (-1)\,i) = -2i$

d) $Z = \sqrt{2}_{45^\circ} = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \text{ sen } 45^\circ) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + i$

9. El complejo de argumento 75° y módulo 12 es el producto de dos complejos, uno de ellos tiene de argumento 45° y el otro de módulo 3. Escribir ambos en forma binómica.

Solución.

Se pide calcular dos números complejos de la forma $Z_1 = r_{45^\circ}$ y $Z_2 = 3_\alpha$ que cumplan la siguiente igualdad:

$$r_{45^\circ} \cdot 3_\alpha = 12_{75^\circ}$$

Multiplicando en forma polar el primer miembro de la igualdad:

$$(r\cdot 3)_{45^\circ+\alpha} = 12_{75^\circ}$$

Igualando por un lado los módulos y por otro los argumentos se calcula r y α:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo}: r\cdot 3 = 12 \\ \text{Argumento}: 45^\circ + \alpha = 75^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = 4 \\ \alpha = 30^\circ \end{array} \right.$$

Conocidos los complejos en forma polar, se pasan a binómica a través de la forma trigonométrica

$$Z_1 = 4_{45^\circ} = 4\cdot(\cos 45^\circ + i\,\text{sen}\,45^\circ) = 4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$$

$$Z_1 = 3_{30^\circ} = 3\cdot(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ) = 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

10. Sean los complejos:

$$Z = 3_{30^\circ}\ ;\ W = 2_{60^\circ}\ ;\ P = 2+2i\ ;\ Q = 2-2\sqrt{3}i$$

realizar las siguientes operaciones:

a) $Z\cdot W$

b) $\overline{Z}\cdot\overline{W}^2$

c) P^2

d) Q^5

e) $\dfrac{Z^2\cdot\overline{P}}{Q^{-1}}$

f) $\dfrac{Q^3+Z^3}{W^3-P^3}$

Solución.

Excepto la suma o resta, las demás operaciones es más fácil hacerlas en forma polar.

$$P = 2+2i \in 1^\circ \text{ Cuadrante}: \left\{\begin{array}{c}\text{Módulo}: r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} \\ \text{Argumento}: \alpha = \text{arctg}\left|\frac{2}{2}\right| = \text{arctg}\,1 = 45^\circ\end{array}\right\}: P = \sqrt{8}_{45^\circ}$$

$$Q = 2-2\sqrt{3}i \in 4^\circ \text{ Cuadrante}: \left\{\begin{array}{c}\text{Módulo}: r = \sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4 \\ \text{Argumento}: \alpha = 360-\text{arctg}\left|\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right| = 360-\text{arctg}\sqrt{3} = 300\end{array}\right\}: Q = 4_{300^\circ}$$

a. $Z\cdot W = 3_{30^\circ}\cdot 2_{60^\circ} = (3\cdot 2)_{30^\circ+60^\circ} = 6_{90^\circ} = 6\cdot(\cos 90^\circ + i\,\text{sen}\,90^\circ) = 6i$

b. $$\overline{Z}\cdot\overline{W}^2 = \left\{\begin{array}{l}\overline{Z} = \overline{3_{30^\circ}} = 3_{-30^\circ} = 3_{330^\circ} \\ \overline{W} = \overline{2_{60^\circ}} = 2_{-60^\circ} = 2_{300^\circ}\end{array}\right\} = 3_{330^\circ}\cdot\left(2_{300^\circ}\right)^2 = 3_{330^\circ}\cdot 2^2{}_{300^\circ\times 2} = 3_{330^\circ}\cdot 4_{600^\circ} =$$

$$= (3\cdot 4)_{330^\circ+600^\circ} = 12_{930^\circ} = 12_{2\times 360^\circ+210^\circ} = 12_{210^\circ} = 12\cdot(\cos 210 + i\,\text{sen}\,210^\circ) = 12\cdot(-\cos 30 - i\,\text{sen}30^\circ) =$$

$$= 12\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = -6\sqrt{3}-6i$$

c. $P^2 = \left(\sqrt{8}_{45^\circ}\right)^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2{}_{45^\circ\times 2} = 8_{90^\circ} = 8\cdot(\cos 90^\circ + i\,\text{sen}\,90^\circ) = 8i$

d. $$Q^5 = \left(4_{300^\circ}\right)^5 = 4^5{}_{300^\circ\times 5} = 1024_{1500^\circ} = 1024_{4\times 360^\circ+60^\circ} = 1024_{60^\circ} =$$

$$= 1024\cdot(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ) = 1024\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 512+512\sqrt{3}i$$

e. $$\frac{Z^2\cdot\overline{P}}{Q^{-1}}=\frac{(3_{30^\circ})^2\cdot\overline{\sqrt{8}_{45^\circ}}}{(4_{300^\circ})^{-1}}=\frac{3^2{}_{30^\circ\times2}\cdot\sqrt{8}_{-45^\circ}}{4^{-1}{}_{300^\circ\times(-1)}}=\frac{9_{60^\circ}\cdot\sqrt{8}_{315}}{4^{-1}{}_{-300^\circ}}=\frac{9_{60^\circ}\cdot\sqrt{8}_{315}}{4^{-1}{}_{60^\circ}}=$$

$$\frac{9\sqrt{8}}{4^{-1}}{}_{60^\circ+315^\circ-60^\circ}=36\sqrt{8}_{315}=36\sqrt{8}\cdot(\cos 315+i\operatorname{sen}315)=36\sqrt{8}\cdot(\cos 45-i\operatorname{sen}45)=$$

$$=36\sqrt{8}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=72-72i$$

f. $$\frac{Q^3+Z^3}{W^3-P^3}=\frac{(4_{300^\circ})^3+(3_{30^\circ})^3}{(2_{60^\circ})^3-\left(\sqrt{8}_{45}\right)^3}=\frac{4^3{}_{300^\circ\times3}+3^3{}_{30^\circ\times3}}{2^3{}_{60^\circ\times3}-\sqrt{8}^3{}_{45^\circ\times3}}=\frac{64_{900^\circ}+27_{90^\circ}}{8_{180^\circ}-16\sqrt{2}_{135}}=$$

$$=\frac{64_{360^\circ\times2+180^\circ}+27_{90^\circ}}{8_{180^\circ}-16\sqrt{2}_{135}}=\frac{64_{180^\circ}+27_{90^\circ}}{8_{180^\circ}-16\sqrt{2}_{135}}=\frac{64\cdot(\cos 180^\circ+i\operatorname{sen}180^\circ)+27\cdot(\cos 90^\circ+i\operatorname{sen}90^\circ)}{8\cdot(\cos 180^\circ+i\operatorname{sen}180^\circ)-16\sqrt{2}\cdot(\cos 135^\circ+i\operatorname{sen}135^\circ)}=$$

$$=\frac{64\cdot(-1+0i)+27\cdot(0+1i)}{8\cdot(-1+0i)-16\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}=\frac{-64+27i}{-8-(-16+16i)}=\frac{-64+27i}{8-16i}=\frac{(-64+27i)\cdot(8+16i)}{(8-16i)\cdot(8+16i)}=$$

$$\frac{\left(-64\cdot8+27\cdot16i^2\right)+(27\cdot8-64\cdot16)i}{8^2-16^2i^2}=\frac{-944-808i}{320}=-\frac{59}{20}-\frac{101}{40}i$$

11. Escribir $Z_1=2+2i$ y $Z_2=6-6i$ en forma polar y calcular $\frac{Z_1}{Z_2}$ en forma polar y en forma binómica.

Solución.

El primer paso es pasar los números complejos a forma polar.

$$Z_1=2+2i\in 1^\circ\text{ Cuadrante}:\left\{\begin{array}{l}\text{Módulo}: r=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}\\ \text{Argumento}: \alpha=\operatorname{arctg}\left|\frac{2}{2}\right|=\operatorname{arctg}1=45^\circ\end{array}\right\}: Z_1=\sqrt{8}_{45^\circ}$$

$$Z_2=6-6i\in 4^\circ\text{ Cuadrante}:\left\{\begin{array}{l}\text{Módulo}: r=\sqrt{6^2+(-6)^2}=\sqrt{72}\\ \text{Argumento}: \alpha=360^\circ-\operatorname{arctg}\left|\frac{-6}{6}\right|=360^\circ-\operatorname{arctg}1=315\end{array}\right\}: Z_2=\sqrt{72}_{315^\circ}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\sqrt{8}_{45^\circ}}{\sqrt{72}_{315^\circ}}=\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}}\right)_{45^\circ-315^\circ}=\sqrt{\frac{8}{72}}_{-270^\circ}=\sqrt{\frac{1}{9}}_{90^\circ}=\frac{1}{3}_{90^\circ}=\frac{1}{3}(\cos 90^\circ+i\operatorname{sen}90^\circ)=0+\frac{1}{3}i=\frac{1}{3}i$$

Nota "El argumento de los números complejos en forma polar es conveniente dejarlo en positivo. Para expresar en positivo un argumento negativo se le suma 360°, si el argumento es menor de −360°, primero se divide por 360° y al resto, en negativo, se le suma 360° "

12. Calcular $(1+i)^{20}$. Expresar la solución en forma binómica.

Solución.

La forma más sencilla de hacer la potenciación de números complejos es en polar.

$$1+i \in 1^{\circ}\text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \text{Argumento}: \alpha = \text{arctg}\left|\frac{1}{1}\right| = \text{arctg } 1 = 45^{\circ} \end{array} \right\} : Z_1 = \sqrt{2}_{45^{\circ}}$$

$$(1+i)^{20} = \left(\sqrt{2}_{45^{\circ}}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20}{}_{20\times 45^{\circ}} = 2^{10}{}_{900^{\circ}} = 1024_{180^{\circ}+360^{\circ}\times 2} = 1024_{180^{\circ}} =$$

$$= 1024\cdot(\cos 180^{\circ} + i \text{ sen } 180^{\circ}) = -1024 + 0\, i = -1024$$

13. Calcular las siguientes raices

a) $\sqrt[3]{-3+3i}$

b) $\sqrt[5]{-1+\sqrt{3}i}$

c) $\sqrt[6]{64}$

d) $\sqrt[4]{-9}$

e) $\sqrt[3]{i}$

f) $\sqrt[4]{-16i}$

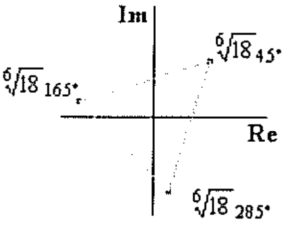
g) $\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i}$

Solución.

Las raíces de números complejos se hacen en forma polar, por lo que el primer paso será pasar el número complejo a forma polar.

a) $$\sqrt[3]{-3+3i} = \left\{ -3+3i \in 2^{\circ}\text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} \\ \text{Argumento}: \alpha = 180 - \text{arctg}\left|\frac{3}{-3}\right| = 135 \end{array} \right\} \right. = \sqrt[3]{\sqrt{18}_{135^{\circ}}}$$

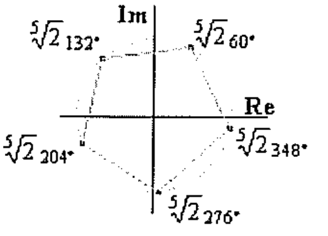
$$\sqrt[3]{\sqrt{18}_{135^{\circ}}} = \left\{ \begin{array}{l} = \sqrt[3]{\sqrt{18}}_{\frac{135^{\circ}+360^{\circ}\cdot 0}{3}} = \sqrt[6]{18}_{45^{\circ}} \\ = \sqrt[3]{\sqrt{18}}_{\frac{135^{\circ}+360^{\circ}\cdot 1}{3}} = \sqrt[6]{18}_{165^{\circ}} \\ = \sqrt[3]{\sqrt{18}}_{\frac{135^{\circ}+360^{\circ}\cdot 2}{3}} = \sqrt[6]{18}_{285^{\circ}} \end{array} \right.$$



Los afijos de las soluciones de una raíz de un número complejo son los vértices de un polígono regular de tantos lados como indique el índice de la raíz

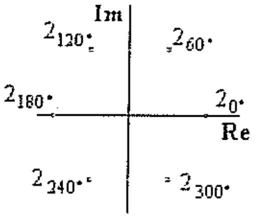
b) $$\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i} = \left\{ 1-\sqrt{3}i \in 4^{\circ}\text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{Argumento}: \alpha = 360 - \text{arctg}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = 300^{\circ} \end{array} \right\} \right. = \sqrt[5]{2}_{300^{\circ}}$$

$$\sqrt[5]{2}_{300^{\circ}} = \left\{ \begin{array}{l} = \sqrt[5]{2}_{\frac{300^{\circ}+360\cdot 0}{5}} = \sqrt[5]{2}_{60^{\circ}} \\ = \sqrt[5]{2}_{\frac{300^{\circ}+360\cdot 1}{5}} = \sqrt[5]{2}_{132^{\circ}} \\ = \sqrt[5]{2}_{\frac{300^{\circ}+360\cdot 2}{5}} = \sqrt[5]{2}_{204^{\circ}} \\ = \sqrt[5]{2}_{\frac{300^{\circ}+360\cdot 3}{5}} = \sqrt[5]{2}_{276^{\circ}} \\ = \sqrt[5]{2}_{\frac{300^{\circ}+360\cdot 4}{5}} = \sqrt[5]{2}_{348^{\circ}} \end{array} \right.$$



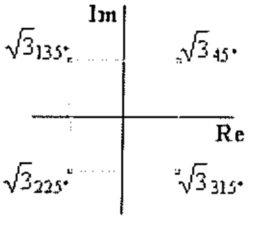
c) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0^\circ}}$

$$\sqrt[6]{64_{0^\circ}} = \begin{cases} = \sqrt[6]{64}\ \dfrac{0^\circ+360^\circ\cdot 0}{6} = 2_{0^\circ} \\ = \sqrt[6]{64}\ \dfrac{0^\circ+360^\circ\cdot 1}{6} = 2_{60^\circ} \\ = \sqrt[6]{64}\ \dfrac{0^\circ+360^\circ\cdot 2}{6} = 2_{120^\circ} \\ = \sqrt[6]{64}\ \dfrac{0^\circ+360^\circ\cdot 3}{6} = 2_{180^\circ} \\ = \sqrt[6]{64}\ \dfrac{0^\circ+360^\circ\cdot 4}{6} = 2_{240^\circ} \\ = \sqrt[6]{64}\ \dfrac{0^\circ+360^\circ\cdot 5}{6} = 2_{300^\circ} \end{cases}$$



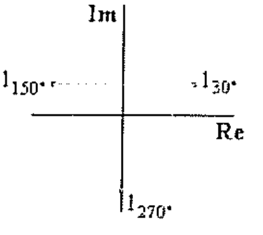
d) $\sqrt[4]{-9} = \sqrt[4]{9_{180^\circ}}$

$$\sqrt[4]{9_{180^\circ}} = \begin{cases} = \sqrt[4]{9}\ \dfrac{180^\circ+360\cdot 0}{4} = \sqrt{3}_{45^\circ} \\ = \sqrt[4]{9}\ \dfrac{180^\circ+360\cdot 0}{4} = \sqrt{3}_{135^\circ} \\ = \sqrt[4]{9}\ \dfrac{180^\circ+360\cdot 0}{4} = \sqrt{3}_{225^\circ} \\ = \sqrt[4]{9}\ \dfrac{180^\circ+360\cdot 0}{4} = \sqrt{3}_{315^\circ} \end{cases}$$



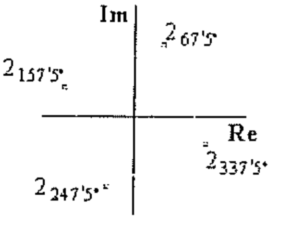
e) $\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1_{90^\circ}}$

$$\sqrt[3]{1_{90^\circ}} = \begin{cases} = \sqrt[3]{1}\ \dfrac{90^\circ+360^\circ\cdot 0}{3} = 1_{30^\circ} \\ = \sqrt[3]{1}\ \dfrac{90^\circ+360^\circ\cdot 1}{3} = 1_{150^\circ} \\ = \sqrt[3]{1}\ \dfrac{90^\circ+360^\circ\cdot 2}{3} = 1_{270^\circ} \end{cases}$$



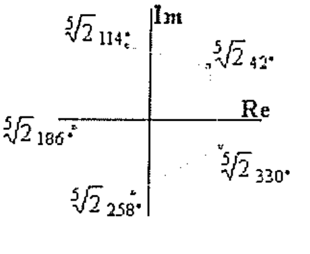
f) $\sqrt[4]{-16i} = \sqrt[4]{16_{270^\circ}}$

$$\sqrt[4]{16_{270^\circ}} = \begin{cases} = \sqrt[4]{16}\ \dfrac{270^\circ+360^\circ\cdot 0}{4} = 2_{67'5^\circ} \\ = \sqrt[4]{16}\ \dfrac{270^\circ+360^\circ\cdot 0}{4} = 2_{157'5^\circ} \\ = \sqrt[4]{16}\ \dfrac{270^\circ+360^\circ\cdot 0}{4} = 2_{247'5^\circ} \\ = \sqrt[4]{16}\ \dfrac{270^\circ+360^\circ\cdot 0}{4} = 2_{337'5^\circ} \end{cases}$$



g) $$\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i} = \left\{ -\sqrt{3}-i \in 3^\circ \text{ Cuadrante} : \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo} : r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{Argumento} : \alpha = 180 + \operatorname{arctg}\left|\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = 210^\circ \end{array} \right\} \right. = \sqrt[5]{2_{210^\circ}}$$

$$\sqrt[5]{2_{210^\circ}} = \begin{cases} \sqrt[5]{2}\ \dfrac{210^\circ+360^\circ\cdot 0}{5} = \sqrt[5]{2}_{42^\circ} \\ \sqrt[5]{2}\ \dfrac{210^\circ+360^\circ\cdot 1}{5} = \sqrt[5]{2}_{114^\circ} \\ \sqrt[5]{2}\ \dfrac{210^\circ+360^\circ\cdot 2}{5} = \sqrt[5]{2}_{186^\circ} \\ \sqrt[5]{2}\ \dfrac{210^\circ+360^\circ\cdot 3}{5} = \sqrt[5]{2}_{258^\circ} \\ \sqrt[5]{2}\ \dfrac{210^\circ+360^\circ\cdot 4}{5} = \sqrt[5]{2}_{330^\circ} \end{cases}$$



14. Hallar las raíces cuadradas de:

a) 4

b) −4

c) 4i

d) −4i

Solución.

a) $\sqrt{4}=\pm 2=\begin{cases}=2+0i\\=-2+0i\end{cases}$

b) $\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=\pm 2i=\begin{cases}=0+2i\\=0-2i\end{cases}$

c) $\sqrt{4i}=\sqrt{4_{90^\circ}}=\begin{cases}=\sqrt{4}_{\frac{90^\circ+360\cdot 0}{2}}=2_{45^\circ}=2\cdot(\cos 45^\circ+i\operatorname{sen}45^\circ)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i\\=\sqrt{4}_{\frac{90^\circ+360\cdot 1}{2}}=2_{225^\circ}=2\cdot(\cos 225^\circ+i\operatorname{sen}225^\circ)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\end{cases}$

d) $\sqrt{-4i}=\sqrt{4_{270^\circ}}=\begin{cases}=\sqrt{4}_{\frac{270^\circ+360^\circ\cdot 0}{2}}=2_{135^\circ}=2\cdot(\cos 135^\circ+i\operatorname{sen}135^\circ)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\\=\sqrt{4}_{\frac{270^\circ+360^\circ\cdot 1}{2}}=2_{315^\circ}=2\cdot(\cos 315^\circ+i\operatorname{sen}315^\circ)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i\end{cases}$

15. Para escribir un número complejo ¿qué argumento debes poner en los siguientes casos?

a) nº real positivo

b) nº real negativo

c) nº imaginario positivo

d) nº imaginario negativo

Solución.

a) $z=r_{0^\circ}$. El afijo está situado sobre el semieje real positivo.

b) $z=r_{180^\circ}$. El afijo está situado sobre el semieje real negativo.

c) $z=r_{90^\circ}$. El afijo está situado sobre el semieje imaginario positivo.

d) $z=r_{270^\circ}$. El afijo está situado sobre el semieje imaginario negativo.

16. Dado un complejo en forma polar ¿Qué transformación sufre si se multiplica por i?

Solución.

Teniendo en cuenta que la forma polar de número i es 1_{90°, al multiplicar un número complejo de la forma r_α por I, el argumento se desplaza 90º.

$$r_\alpha\cdot 1_{90^\circ}=(r\cdot 1)_{\alpha+90^\circ}=r_{\alpha+90^\circ}$$

17. Calcula la raíz cúbica del complejo $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ siendo $Z_1=16_{210^\circ}$ y $Z_2=-\sqrt{3}-i$

Solución.

El cociente y la radicación de números complejos se hace en forma polar.

$$Z_2=-\sqrt{3}-i:\begin{cases}\text{Módulo}:\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2\\ \text{Argumento}: z_2\in 3^\circ\text{ Cuadrante. }\alpha=180+\operatorname{arctg}\left|\dfrac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}\right|=180+\operatorname{arctg}\left|\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}\right|=210\end{cases}:z_2=2_{210^\circ}$$

$$\sqrt[3]{\frac{Z_1}{Z_2}}=\sqrt[3]{\frac{16_{210^\circ}}{2_{210^\circ}}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}_{210-210}}=\sqrt[3]{8_{0^\circ}}=\begin{cases}\sqrt[3]{8}_{\frac{0+360\cdot 0}{3}}=2_{0^\circ}\\ \sqrt[3]{8}_{\frac{0+360\cdot 1}{3}}=2_{120^\circ}\\ \sqrt[3]{8}_{\frac{0+360\cdot 2}{3}}=2_{240^\circ}\end{cases}$$

18. Calcular en forma polar: $\left(1+\sqrt{3}\ i\right)^6 \cdot (-1+i)^7$

Solución.

Lo primero es expresar los números complejos en polar, ya que las operaciones (producto y potencia) en esta forma son más sencillas.

$$1+\sqrt{3}i \in 1^{\circ}\text{ Cuadrante}: \left\{\begin{array}{c} \text{Módulo}: r=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2 \\ \text{Argumento}: \alpha=\text{arctg}\left|\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right|=\text{arctg}\sqrt{3}=60^{\circ} \end{array}\right\} = 2_{60^{\circ}}$$

$$-1+i \in 2^{\circ}\text{ Cuadrante}: \left\{\begin{array}{c} \text{Módulo}: r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2} \\ \text{Argumento}: \alpha=180-\text{arctg}\left|\dfrac{1}{-1}\right|=135^{\circ} \end{array}\right\} = \sqrt{2}_{135^{\circ}}$$

El orden de operación es primero las potencias y segundo el producto.

$$\left(1+\sqrt{3}\ i\right)^6 \cdot (-1+i)^7 = \left(2_{60^{\circ}}\right)^6 \cdot \left(\sqrt{2}_{135^{\circ}}\right)^7 = 2^6{}_{6\times 60^{\circ}} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^7{}_{7\times 135^{\circ}} = 64_{360} \cdot \sqrt{2^7}_{945^{\circ}} =$$

$$64_{0^{\circ}} \cdot 2^3\sqrt{2}_{2\times 360^{\circ}+225^{\circ}} = 64_{0^{\circ}} \cdot 8\sqrt{2}_{225^{\circ}} = \left(64\cdot 8\sqrt{2}\right)_{0^{\circ}+225^{\circ}} = 512\sqrt{2}_{225^{\circ}}$$

19. Calcular y expresar en forma binómica $\dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{(-1-i)^2}$

Solución.

Lo primero es expresar los números complejos en polar, ya que las operaciones (cociente y potencia) en esta forma son más sencillas.

$$-2+2\sqrt{3}i \in 2^{\circ}\text{ Cuadrante}: \left\{\begin{array}{c} \text{Módulo}: r=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16}=4 \\ \text{Argumento}: \alpha=180^{\circ}-\text{arctg}\left|\dfrac{2\sqrt{3}}{-2}\right|=\text{arctg}\sqrt{3}=120^{\circ} \end{array}\right\} = 4_{120^{\circ}}$$

$$-1-i \in 3^{\circ}\text{ Cuadrante}: \left\{\begin{array}{c} \text{Módulo}: r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2} \\ \text{Argumento}: \alpha=180^{\circ}+\text{arctg}\left|\dfrac{-1}{-1}\right|=225^{\circ} \end{array}\right\} = \sqrt{2}_{225^{\circ}}$$

El orden de operación es primero la potencia y segundo el cociente.

$$\frac{-2+2\sqrt{3}i}{(-1-i)^2} = \frac{4_{120^{\circ}}}{\left(\sqrt{2}_{225^{\circ}}\right)^2} = \frac{4_{120^{\circ}}}{\left(\sqrt{2}\right)^2{}_{2\times 225^{\circ}}} = \frac{4_{120^{\circ}}}{2_{450^{\circ}}} = \frac{4_{120^{\circ}}}{2_{360^{\circ}+90^{\circ}}} = \frac{4_{120^{\circ}}}{2_{90^{\circ}}} = \left(\frac{4}{2}\right)_{120^{\circ}-90^{\circ}} = 2_{30^{\circ}} =$$

$$= 2\cdot\left(\cos 30^{\circ} + i\,\text{sen}\,30^{\circ}\right) = \sqrt{3}+i$$

20. Calcular: $\dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i}$

Solución.

Lo primero será operar las potencias de i teniendo en cuenta su periodicidad.

$$i^7 = i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = 1\cdot(-i) = -i$$

$$i^{-7} = i^{-1\cdot(4+3)} = \left(i^4 \cdot i^3\right)^{-1} = (1\cdot(-i))^{-1} = (-i)^{-1} = \frac{1}{-i} = \frac{1\cdot i}{-i\cdot i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{-(-1)} = i$$

$$\frac{i^7 - i^{-7}}{2i} = \frac{-i-i}{2i} = \frac{-2i}{2i} = -1 = -1+0i$$

21. Dado el número complejo $z=\dfrac{1+i^7}{1+i}$ calcular la expresión trigonométrica del nº $\bar{z}$.

Solución.

Lo primero será operar las potencias de i teniendo en cuenta su periodicidad.

$$i^7=i^{4+3}=i^4\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i$$

$$z=\frac{1+i^7}{1+i}=\frac{1-i}{1+i}$$

Lo más sencillo es trabajar en forma polar.

$$1+i\in 1^{\circ}\text{ Cuadrante}:\left\{\begin{array}{c}\text{Módulo}: r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\\ \text{Argumento}: \alpha=\text{arctg}\left|\frac{1}{1}\right|=\text{arctg }1=45^{\circ}\end{array}\right\}=\sqrt{2}_{45^{\circ}}$$

$$1-i\in 4^{\circ}\text{ Cuadrante}:\left\{\begin{array}{c}\text{Módulo}: r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\\ \text{Argumento}: \alpha=360^{\circ}-\text{arctg}\left|\frac{-1}{1}\right|=360^{\circ}-\text{arctg }1=315\end{array}\right\}=\sqrt{2}_{315^{\circ}}$$

$$z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{\sqrt{2}_{45^{\circ}}}{\sqrt{2}_{315^{\circ}}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)_{45^{\circ}-315^{\circ}}=1_{-270^{\circ}}=1_{90^{\circ}}$$

$$\text{Si } z=1_{90^{\circ}}\Rightarrow \bar{z}=1_{-90^{\circ}}=1_{270^{\circ}}=1\cdot(\cos 270^{\circ}+i\,\text{sen } 270^{\circ})$$

22. Sea $z=10\sqrt{3}-10\,i$. Calcular z^5, $\sqrt[4]{z}$

Solución.

Lo primero es expresar el número complejo en polar, ya que las operaciones (potencia y radicación) en esta forma son más sencillas.

$$10\sqrt{3}-10i\in 4^{\circ}\text{ Cuadrante}:\left\{\begin{array}{c}\text{Módulo}: r=\sqrt{\left(10\sqrt{3}\right)^2+(-10)^2}=\sqrt{400}=20\\ \text{Argumento}: \alpha=360^{\circ}-\text{arctg}\left|\frac{-10}{10\sqrt{3}}\right|=360^{\circ}-\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=330^{\circ}\end{array}\right\}=20_{330^{\circ}}$$

$$z^5=\left(20_{330^{\circ}}\right)^5=20^5{}_{5\times 330^{\circ}}=32\times 10^5{}_{1650^{\circ}}=32\times 10^5{}_{4\times 360^{\circ}+210^{\circ}}=32\times 10^5{}_{210^{\circ}}$$

$$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{20_{330^{\circ}}}=\left\{\begin{array}{l}=\sqrt[4]{20}_{\frac{330^{\circ}+360^{\circ}\cdot 0}{4}}=\sqrt[4]{20}_{82'5^{\circ}}\\ =\sqrt[4]{20}_{\frac{330^{\circ}+360^{\circ}\cdot 1}{4}}=\sqrt[4]{20}_{172'5^{\circ}}\\ =\sqrt[4]{20}_{\frac{330^{\circ}+360^{\circ}\cdot 2}{4}}=\sqrt[4]{20}_{262'5^{\circ}}\\ =\sqrt[4]{20}_{\frac{330^{\circ}+360^{\circ}\cdot 3}{4}}=\sqrt[4]{20}_{352'5^{\circ}}\end{array}\right.$$

23. Calcular $\sqrt[5]{\left(-\sqrt{3}-i\right)^3}$

Solución.

La operación se hace en forma polar.

$$\text{Módulo}\left(-\sqrt{3}-i\right)=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$$

$$\text{Argumento}: -\sqrt{3}-i\in 3^{\circ}\text{ Cuadrante}\Rightarrow \alpha=180+\text{arctg}\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right|=210^{\circ}$$

$$\sqrt[5]{\left(-\sqrt{3}-i\right)^3}=\sqrt[5]{\left(2_{210^\circ}\right)^3}=\sqrt[5]{2^3_{210^\circ\cdot 3}}=\sqrt[5]{8_{630^\circ}}=\sqrt[5]{8_{270^\circ}}=\begin{cases}\sqrt[5]{8}\ \frac{270+360\cdot 0}{5}=\sqrt[5]{8}_{\ 54^\circ}\\ \sqrt[5]{8}\ \frac{270+360\cdot 1}{5}=\sqrt[5]{8}_{\ 126^\circ}\\ \sqrt[5]{8}\ \frac{270+360\cdot 2}{5}=\sqrt[5]{8}_{\ 198^\circ}\\ \sqrt[5]{8}\ \frac{270+360\cdot 3}{5}=\sqrt[5]{8}_{\ 270^\circ}\\ \sqrt[5]{8}\ \frac{270+360\cdot 4}{5}=\sqrt[5]{8}_{\ 342^\circ}\end{cases}$$

24. Resolver la ecuación: $z^3 i+\sqrt{3}=i^{251}$

Solución.

Lo primero es simplificar la potencia de i, para ello se divide el exponente entre cuatro, que es el periodo de las potencias de i ($i = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$), obteniendo de cociente 62 y de resto 3.

$$i^{251}=i^{4\times 62+3}=\left((i)^4\right)^{62}\cdot i^3=1^{62}\cdot(-i)=-i$$

Sustituyendo en la ecuación y despejando z:

$$z^3 i+\sqrt{3}=-i\quad : \quad z=\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{3}-i}{i}}$$

Para operar se expresan los complejos en forma polar.

- $-\sqrt{3}-i=\left\{\begin{array}{c}\text{Módulo}:\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2.\\ \text{Argumento}(3^\circ\text{ Cuadrante})\ \alpha=180+\operatorname{arctg}\left|\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right|=180+\operatorname{arctg}\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right|=210\end{array}\right\}=2_{210^\circ}$

- $i=\left\{\begin{array}{c}\text{Módulo}=1\\ \text{Argumento}=90^\circ\end{array}\right\}=1_{90^\circ}$

$$z=\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{3}-i}{i}}=\sqrt[3]{\frac{2_{210^\circ}}{1_{90^\circ}}}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{1}\right)_{210^\circ-90^\circ}}=\sqrt[3]{2_{120^\circ}}=\begin{cases}=\sqrt[3]{2}\ \frac{120^\circ+360\times 0}{3}=\sqrt[3]{2}_{\ 40^\circ}\\ =\sqrt[3]{2}\ \frac{120^\circ+360\times 1}{3}=\sqrt[3]{2}_{\ 160^\circ}\\ =\sqrt[3]{2}\ \frac{120^\circ+360\times 2}{3}==\sqrt[3]{2}_{\ 280^\circ}\end{cases}$$

25. Dibuja los afijos de la ecuación $(z-1)\cdot(z^2+z+1)=0$

Solución.

$$(z-1)\cdot\left(z^2+z+1\right)=0:\begin{cases}z-1=0:z=1\\ z^2+z+1=0\end{cases}$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$z^2+z+1=0\qquad z=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

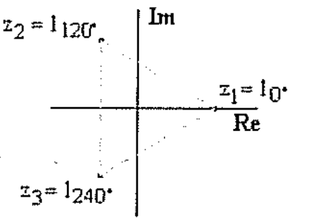
Las soluciones de la ecuación son:: $\begin{cases}z=1\\ z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{cases}$

Para dibujar los afijos, la mejor forma es expresar las soluciones en forma polar.

$$z_1 = 1 = 1_{0^\circ}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \in 2^\circ \text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \text{Argumento}: \alpha = 180 - \text{arctg}\left|\dfrac{\sqrt{3}/2}{-1/2}\right| = 180 - \text{arctg}\,\sqrt{3} = 120^\circ \end{array} \right\} = 1_{120^\circ}$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \in 3^\circ \text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \text{Argumento}: \alpha = 180 + \text{arctg}\left|\dfrac{-\sqrt{3}/2}{-1/2}\right| = 180 + \text{arctg}\,\sqrt{3} = 240^\circ \end{array} \right\} = 1_{240^\circ}$$



26. Calcular los valores de z que verifican: $(1+i)z^3 - 2i = 0$

Solución.

De la ecuación propuesta despejamos z.

$$(1+i)z^3 - 2i = 0 \qquad (1+i)z^3 = 2i \qquad z^3 = \frac{2i}{1+i} \qquad z = \sqrt[3]{\frac{2i}{1+i}}$$

Para calcular z la mejor forma es operar en forma polar.

$2i = 2_{90^\circ}$ Imaginario puro positivo

$$1+i \in 1^\circ \text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \text{Argumento}: \alpha = \text{arctg}\left|\frac{1}{1}\right| = \text{arctg}\,1 = 45^\circ \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{45^\circ}$$

Sustituimos y operamos, primero el cociente y luego la raíz.

$$z = \sqrt[3]{\frac{2i}{1+i}} = \sqrt[3]{\frac{2_{90^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{90^\circ-45^\circ}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \left\{ \begin{array}{l} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\ \frac{34^\circ+360\cdot 0}{3} = \sqrt[6]{2}_{15^\circ} \\ = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\ \frac{34^\circ+360\cdot 1}{3} = \sqrt[6]{2}_{135^\circ} \\ = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\ \frac{34^\circ+360\cdot 2}{3} = \sqrt[6]{2}_{255^\circ} \end{array} \right.$$

27. Resolver la ecuación $x^4+1=i$

Solución.

De la ecuación propuesta despejamos x.

$$x=\sqrt[4]{-1+i}$$

Trabajamos en forma polar.

$$-1+i\in 2^{\circ}\text{ Cuadrante}:\left\{\begin{array}{c}\text{Módulo}: r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}\\ \text{Argumento}: \alpha=180-\operatorname{arctg}\left|\dfrac{1}{-1}\right|=180-\operatorname{arctg}1=135\end{array}\right\}=\sqrt{2}_{135^{\circ}}$$

$$x=\sqrt[4]{-1+i}=\sqrt[4]{\sqrt{2}_{135^{\circ}}}=\begin{cases}=\sqrt[4]{\sqrt{2}}_{\frac{135^{\circ}+360\cdot 0}{4}}=\sqrt[8]{2}_{33'75^{\circ}}\\ =\sqrt[4]{\sqrt{2}}_{\frac{135^{\circ}+360\cdot 1}{4}}=\sqrt[8]{2}_{123'75^{\circ}}\\ =\sqrt[4]{\sqrt{2}}_{\frac{135^{\circ}+360\cdot 2}{4}}=\sqrt[8]{2}_{213'75^{\circ}}\\ =\sqrt[4]{\sqrt{2}}_{\frac{135^{\circ}+360\cdot 3}{4}}=\sqrt[8]{2}_{303'75^{\circ}}\end{cases}$$

28. Comprobar que el número complejo $z=1-\sqrt{3}i$ es solución de la ecuación $z^2-2z+4=0$. En caso afirmativo calcular la otra solución.

Solución.

Se puede hacer de dos formas distintas.

1ª. Sustituimos el valor de z en la ecuación y se compraba si la cumple.

$$\left.\begin{array}{r}z^2-2z+4=0\\ z=1-\sqrt{3}i\end{array}\right\}:\left(1-\sqrt{3}i\right)^2-2\left(1-\sqrt{3}i\right)+4=1^2-2\sqrt{3}i+\left(\sqrt{3}\right)^2i^2-2+2\sqrt{3}i+4=1-3-2+4=0$$

La cumple, luego es solución. La segunda solución se obtiene teniendo en cuenta que si un número complejo es solución de una ecuación, su conjugado también es solución.

$$z_2=\overline{z}_1=1+\sqrt{3}i$$

2ª. Resolviendo la ecuación

$$z^2-2z+4=0$$

$$z=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{12}\cdot\sqrt{-1}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{3}i}{2}=\frac{2}{2}\pm\frac{2\sqrt{3}}{2}i=$$

$$=\begin{cases}z_1=1+\sqrt{3}i\\ z_2=1-\sqrt{3}i\end{cases}$$

29. Encontrar las ecuaciones de 2º grado cuyas raíces son: $\sqrt{2}_{45^{\circ}}$, $\sqrt{2}_{315^{\circ}}$

Solución.

Expresamos los números en forma binómico.

$$\sqrt{2}_{45^{\circ}}=\sqrt{2}\left(\cos 45^{\circ}+i\operatorname{sen}45^{\circ}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1+i$$

$$\sqrt{2}_{315^{\circ}}=\sqrt{2}\left(\cos 315^{\circ}+i\operatorname{sen}315^{\circ}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1-i$$

La ecuación de 2º grado será:

$$(x-(1+i))\cdot(x-(1-i))=0$$

Operando, simplificando y ordenando se obtiene la ecuación.

$$(x-(1+i))\cdot(x-(1-i))=x^2-x(1-i)-x(1+i)+(1+i)(1-i)=x^2-x+xi-x-xi+1^2-i^2=x^2-2x+2=0$$

$$x^2-2x+2=0$$

4. S

TRIGONOMETRIA

1. Calcular las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.

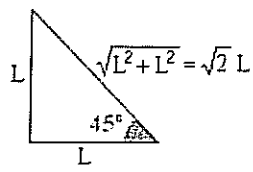
Solución.

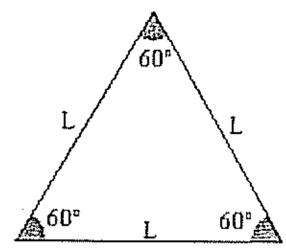
Para calcular las razones trigonométricas de 45°, nos ayudamos de un triángulo rectángulo isósceles como el de la figura.

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{L}{\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{L}{\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{L}{L} = 1$$



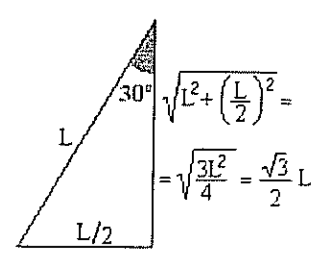


Para calcular las razones trigonométricas de 30° y 60°, nos ayudamos de un triángulo equilátero que dividimos por la base para obtener un triángulo rectángulo con ángulos agudos de 30° y 60°, como el de la figura.

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{L/2}{L} = \frac{1}{2} =$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}L}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

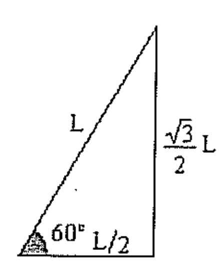
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{L/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}L} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}L}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{L/2}{L} = \frac{1}{2} =$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}L}{L/2} = \sqrt{3}$$



2. Si cos A > 0,8, siendo A un ángulo agudo, ¿cómo es sen A y tg A?

Solución.

Teniendo en cuenta que las razones trigonométricas de los ángulos del primer cuadrante son positivas, y que el cuadrado de un número comprendido entre 0 y 1 es menor que el número, se aplica la relación fundamental de la trigonometría:

$$\left.\begin{array}{r}\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\\ \operatorname{sen}\alpha > 0{,}8\end{array}\right\} : (0{,}8)^2 + \cos^2\alpha < 1 \Rightarrow \cos^2\alpha < 1 - (0{,}8)^2 = 0{,}36 \ : \ \cos\alpha < 0{,}36$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} : \left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}\alpha > 0{,}8\\ \cos\alpha < 0{,}6\end{array}\right\} : \operatorname{tg}\alpha > \frac{0{,}8}{0{,}6} : \operatorname{tg}\alpha > \frac{4}{3}$$

3. 0'6 < sen α < 0'8, di entre que valores están comprendidos cos α y tg α.

Solución.

- Sí $\operatorname{sen}\alpha > 0,6 : \operatorname{sen}^2\alpha > 0,6^2 : 1-\cos^2\alpha > 0,36 : 1-0,36 > \cos^2\alpha : 0,64 > \cos^2\alpha : \cos\alpha < 0,8$

- Si $\operatorname{sen}\alpha < 0,8 : \operatorname{sen}^2\alpha < 0,8^2 : 1-\cos^2\alpha < 0,64 : 1-0,64 < \cos^2\alpha : 0,36 < \cos^2\alpha : \cos\alpha > 0,6$

Conclusión: Sí $0,6 < \operatorname{sen}\alpha < 0,8 \Rightarrow 0,6 < \cos\alpha < 0,8$

- Si $\left.\begin{cases}\operatorname{sen}\alpha > 0,6\\ \cos\alpha < 0,8\end{cases}\right\} : \operatorname{tg}\alpha > \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0,6}{0,8} > 0,75$

- Sí $\left.\begin{cases}\operatorname{sen}\alpha < 0,8\\ \cos\alpha > 0,6\end{cases}\right\} : \operatorname{tg}\alpha < \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0,8}{0,6} < 1,33$

Conclusión: Sí $0,6 < \operatorname{sen}\alpha < 0,8 \Rightarrow 0,75 < \operatorname{tg}\alpha < 1,33$

4. Calcular las restantes razones trigonométricas.

a) $\operatorname{tg}\alpha = 2$; $\operatorname{sen}\alpha > 0$
b) $\operatorname{tg}\alpha = 3$; $\operatorname{sen}\alpha < 0$
c) $\sec\alpha = 3$; $\operatorname{tg}\alpha < 0$
d) $\operatorname{cosec}\alpha = -\dfrac{4}{3}$; $\alpha \notin (0, \pi)$
e) $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{1}{3}$; $\cos\alpha > 0$

Solución.

a. tg α =2; sen α > 0. El cuadrante se determinan mediante el signo de la tangente y del seno, la tangente es positiva en el 1° o 3° cuadrante, el seno es positivo en el 1° o 2° cuadrante, por lo tanto α pertenece al 1° cuadrante que en el que se cumplen las dos condiciones.

$$\text{Si } \alpha \in 1^{\circ}\text{ Cuadrante} : \begin{cases}\text{seno y cosecante} +\\ \text{coseno y secante} +\\ \text{tangente y cotangente} +\end{cases}$$

Conocido el valor de la tangente se obtienen la cotangente y la secante.

$$\operatorname{cotag}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tag}\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha : \ \sec\alpha = \pm\sqrt{\operatorname{tag}^2\alpha + 1} = +\sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$$

Con la secante se obtiene el coseno

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} : \ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Conocidas la tangente y el coseno se obtiene el seno mediante la definición de tangente.

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} : \ \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tag}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot 2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Por último del seno se obtiene la cosecante.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{5}/5} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

b. tg α = 3; sen α < 0. El cuadrante se determinan mediante el signo de la tangente y del seno, la tangente es positiva en el 1° o 3° cuadrante, el seno es negativo en el 3° o 4° cuadrante, por lo tanto α pertenece al 3° cuadrante que en el que se cumplen las dos condiciones.

$$\text{Si } \alpha \in 3^{\circ}\text{ Cuadrante} : \begin{cases}\text{seno y cosecante} -\\ \text{coseno y secante} -\\ \text{tangente y cotangente} +\end{cases}$$

Conocido el valor de la tangente se obtienen la cotangente y la secante.

$$\text{cotag}\,\alpha = \frac{1}{\text{tag}\,\alpha} = \frac{1}{3}$$

$$\text{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha : \sec\alpha = \pm\sqrt{\text{tag}^2\alpha + 1} = -\sqrt{3^2 + 1} = -\sqrt{10}$$

Con la secante se obtiene el coseno

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} : \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Conocidas la tangente y el coseno se obtiene el seno mediante la definición de tangente.

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} : \text{sen}\,\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tag}\,\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10} \cdot 3 = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Por último del seno se obtiene la cosecante.

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{-3\sqrt{10}/10} = -\frac{10}{3\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$$

c. $\sec\alpha = 3$; $\text{tg}\,\alpha < 0$. El cuadrante se determinan mediante el signo de la secante y de la tangente, la secante es positiva en el 1° o 4° cuadrante, la tangente es negativa en el 2° o 4° cuadrante, por lo tanto α pertenece al 4° cuadrante que en el que se cumplen las dos condiciones.

$$\text{Si}\ \alpha \in 4^\circ\ \text{Cuadrante} : \begin{cases} \text{seno y cosecante} - \\ \text{coseno y secante} + \\ \text{tangente y cotangente} - \end{cases}$$

Conocida la secante se calcula el coseno y la tangente.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} : \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{3}$$

$$\text{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha : \text{tag}\,\alpha = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1} = -\sqrt{3^2 - 1} = -\sqrt{8}$$

Conocidas la tangente y el coseno se obtiene el seno mediante la definición de tangente.

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} : \text{sen}\,\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tag}\,\alpha = \frac{1}{3} \cdot \left(-\sqrt{8}\right) = -\frac{\sqrt{8}}{3}$$

Conocidas las razones directas (seno y tangente) se calculan la inversas (cosecante y cotangente) mediante su definición.

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{8}/3} = -\frac{3}{\sqrt{8}} = -\frac{3\sqrt{8}}{8} : \text{cotag}\,\alpha = \frac{1}{\text{tag}\,\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{8}}{8}$$

d. $\sec\alpha = -4/3$; $\alpha \notin (0, \pi)$. La secante es negativa en el 2° y 3° cuadrante, si además se tiene en cuenta que el ángulo no pertenece ni al 1° ni al 2° cuadrante se concluye que α pertenece al 3° cuadrante.

$$\text{Si}\ \alpha \in 3^\circ\ \text{Cuadrante} : \begin{cases} \text{seno y cosecante} - \\ \text{coseno y secante} - \\ \text{tangente y cotangente} + \end{cases}$$

Conocida la secante se calcula el coseno y la tangente.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} : \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-4/3} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha : \text{tag}\,\alpha = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1} = +\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{16}{9} - 1} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Conocidas la tangente y el coseno se obtiene el seno mediante la definición de tangente.

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} : \ \text{sen}\,\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tag}\,\alpha = -\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Conocidas las razones directas (seno y tangente) se calculan la inversas (cosecante y cotangente) mediante su definición.

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{7}/4} = -\frac{4}{\sqrt{7}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7} : \ \text{cotag}\,\alpha = \frac{1}{\text{tag}\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{7}/3} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

e. $\text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{3}$; $\cos\alpha > 0$. El seno es negativo en el 3° y 4° cuadrante, el coseno es positivo en el 1° y 4° cuadrante, por lo tanto el ángulo α pertenece al 4° cuadrante.

$$\text{Si } \alpha \in 4^\circ \text{ Cuadrante}: \begin{cases} \text{seno y cosecante} - \\ \text{coseno y secante} + \\ \text{tangente y cotangente} - \end{cases}$$

Conocido el valor del seno se calcula el coseno mediante la ecuación fundamental.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = +\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

Conocido el seno y el coseno se calcula la tangente por su definición.

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-1/3}{\sqrt{8}/3} = -\frac{1}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{8}}{8}$$

Conocidas las razones directas (seno, coseno y tangente) se calculan la inversas (cosecante, secante y cotangente) mediante su definición.

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{-1/3} = -3 \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{8}/3} = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{8}}{8}$$

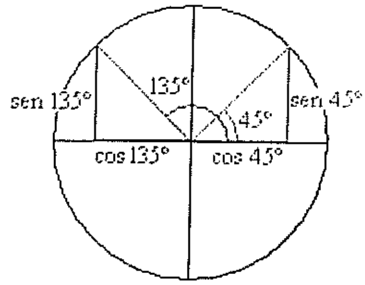
$$\text{cotag}\,\alpha = \frac{1}{\text{tag}\,\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{8}/8} = -\frac{8}{\sqrt{8}} = -\sqrt{8}$$

5. Calcular las razones trigonométricas de los siguientes ángulos en función de sus ángulos asociados agudos.

a) 135°
b) 120°
c) 330°
d) 240°
e) 150°
f) 1290°
g) Sabiendo que tg 18° = 0,32 calcular la razones trigonométricas de los siguientes ángulos:
   i) 72°
   ii) 108°
   iii) 162°
   iv) 198°
   v) 252°
   vi) 288°
   vii) 342°

Solución.

a. 135° es suplementario con 45° (135° + 45° =180°). Las razones trigonométricas de 135° están relacionadas con las de 45°, la forma más sencilla de encontrar esta relación es de forma gráfica.

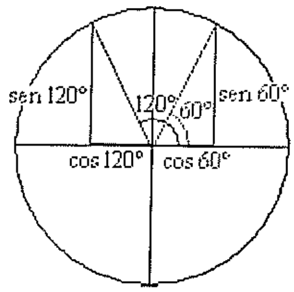


$$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 135° = \frac{\operatorname{sen} 135°}{\cos 135°} = \frac{\operatorname{sen} 45°}{-\cos 45°} = -\operatorname{tg} 45° = -1$$

b. 120° es suplementario con 60° (120° + 60° =180°). Las razones trigonométricas de 120° están relacionadas con las de 60°, la forma más sencilla de encontrar esta relación es de forma gráfica.

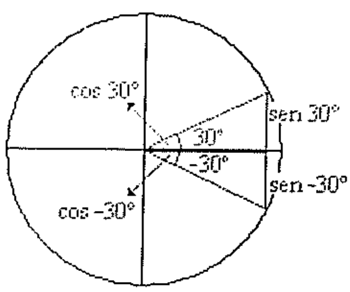


$$\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 135° = \frac{\operatorname{sen} 120°}{\cos 120°} = \frac{\operatorname{sen} 60°}{-\cos 60°} = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$$

c. 330° equivalente a –30°, asociado a 30°

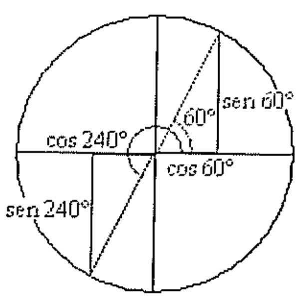


$$\operatorname{sen} -30° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos -30° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(-30°) = \frac{\operatorname{sen}(-30°)}{\cos(-30°)} = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

d. 240° se asocia a 60° porque se diferencia del él en 180° (240° = 60° +180°).

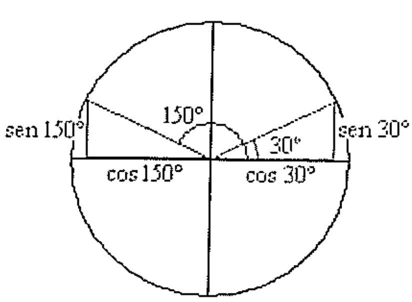


$$\operatorname{sen} 240° = -\operatorname{sen} 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 240° = \frac{\operatorname{sen} 240°}{\cos 240°} = \frac{-\operatorname{sen} 60°}{-\cos 60°} = \operatorname{tg} 60 = \sqrt{3}$$

e. 150° suplementario de 30° (150° + 30° = 180°)



$$\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$$

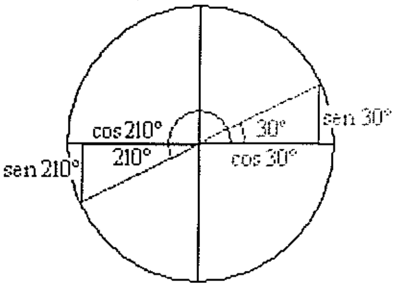
$$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 150° = \frac{\operatorname{sen} 150°}{\cos 150°} = \frac{\operatorname{sen} 30°}{-\cos 30°} = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

f. 1290. Por ser un ángulo superior a 360°, se divide por 360 y nos quedamos con el resto.

$$1260° = 3\times360°+210$$

Las razones trigonométricas de 1290° coinciden con las de 210°, (relación entre las razones trigonométricas de ángulos que se diferencian en un número entero de vueltas, 360° ó 2π radianes) y las de este (210°) se relacionan con las de 30° (210° = 180°+30°).



$$\operatorname{sen} 1290° = \operatorname{sen}\left(360°\times3 + 210°\right) = \operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 1290° = \cos\left(360°\times3 + 210°\right) = \cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 1290° = \operatorname{tg}\left(360°\times3 + 210°\right) = \operatorname{tg} 210° = \frac{\operatorname{sen} 210°}{\cos 210} = \frac{-\operatorname{sen} 30°}{-\cos 30°} = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

g. Lo primero es calcular el seno y el coseno de 18° conocida la tangente (tg 18° = 0,32). Por ser un ángulo del primer cuadrante, todas sus razones trigonométricas son positivas.

Conocido el valor de la tangente se obtienen la secante.

$$\operatorname{tag}^2 18°+1 = \sec^2 18° : \ \sec 18° = \pm\sqrt{\operatorname{tag}^2 18°+1} = +\sqrt{0{,}32^2+1} = 1{,}05$$

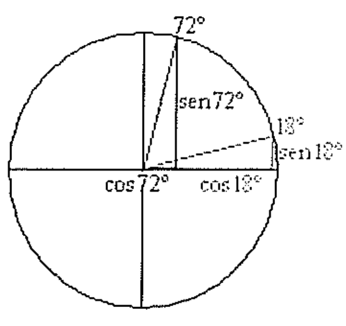
Con la secante se obtiene el coseno

$$\sec 18° = \frac{1}{\cos 18°} : \ \cos 18° = \frac{1}{\sec 18°} = \frac{1}{1{,}05} = 0{,}95$$

Conocidas la tangente y el coseno se obtiene el seno mediante la definición de tangente.

$$\operatorname{tag} 18° = \frac{\operatorname{sen} 18°}{\cos 18°} : \ \operatorname{sen} 18° = \cos 18 \cdot \operatorname{tag} 18 = 0{,}95 \cdot 0{,}32 = 0{,}30$$

i. 72° = 90° − 18°

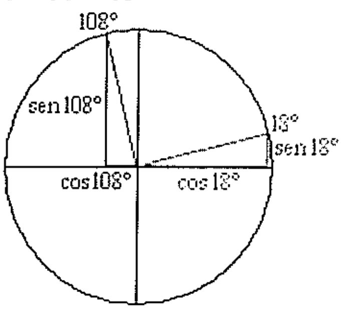


$$\operatorname{sen} 72° = \cos 18° = 0{,}95$$

$$\cos 72° = \operatorname{sen} 18° = 0{,}30$$

$$\operatorname{tg} 72° = \frac{\operatorname{sen} 72°}{\cos 72°} = \frac{\cos 18°}{\operatorname{sen} 18°} = \frac{1}{\operatorname{tg} 18°} = \frac{1}{0{,}32} = 3{,}12$$

ii. 108° = 90° + 18°

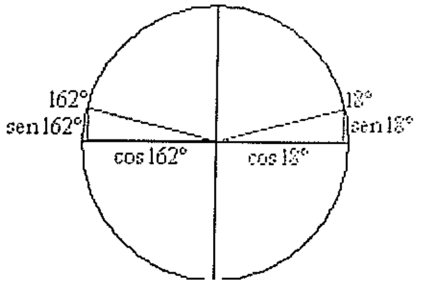


$$\operatorname{sen} 108° = \cos 18 = 0{,}95$$

$$\cos 108° = -\operatorname{sen} 18° = -0{,}30$$

$$\operatorname{tg} 108° = \frac{\operatorname{sen} 108°}{\cos 108°} = \frac{\cos 18°}{-\operatorname{sen} 18°} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 18°} = -\frac{1}{0{,}32} = -3{,}12$$

iii. $162^\circ = 180^\circ - 18^\circ$

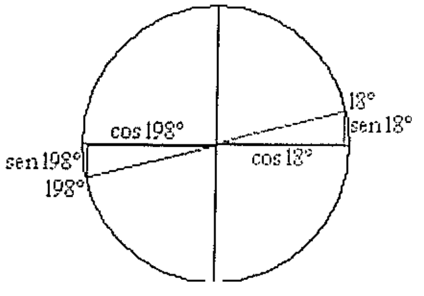


$\text{sen } 162^\circ = \text{sen } 18^\circ = 0{,}30$

$\cos 162^\circ = -\cos 18^\circ = -0{,}95$

$\text{tg } 162^\circ = \dfrac{\text{sen} 162^\circ}{\cos 162^\circ} = \dfrac{\text{sen } 18^\circ}{-\cos 18^\circ} = -\text{tg } 18^\circ = -0{,}32$

iv. $198^\circ = 180^\circ + 18^\circ$

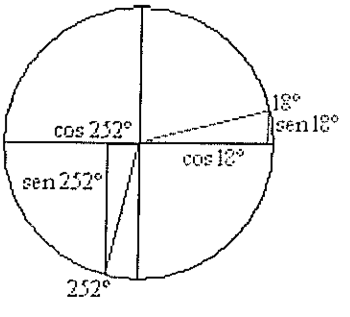


$\text{sen } 198^\circ = -\text{sen } 18^\circ = -0{,}30$

$\cos 198^\circ = -\cos 18^\circ = -0{,}95$

$\text{tg } 198^\circ = \dfrac{\text{sen} 198^\circ}{\cos 198^\circ} = \dfrac{-\text{sen } 18^\circ}{-\cos 18^\circ} = \text{tg } 18^\circ = 0{,}32$

v. $252^\circ = 270^\circ - 18^\circ$

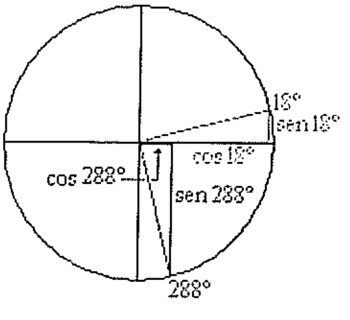


$\text{sen } 252^\circ = -\cos 18 = -0{,}95$

$\cos 252^\circ = -\text{sen} 18^\circ = -0{,}30$

$\text{tg } 252^\circ = \dfrac{\text{sen } 252^\circ}{\cos 252^\circ} = \dfrac{-\cos 18^\circ}{-\text{sen } 18^\circ} = \dfrac{1}{\text{tg } 18^\circ} = \dfrac{1}{0{,}32} = 3{,}12$

vi. $298^\circ = 270^\circ + 18^\circ$

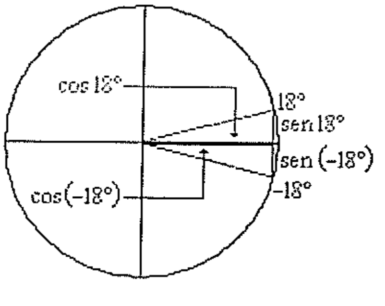


$\text{sen } 288^\circ = -\cos 18 = -0{,}95$

$\cos 288^\circ = \text{sen} 18^\circ = 0{,}30$

$\text{tg } 288^\circ = \dfrac{\text{sen } 288^\circ}{\cos 288^\circ} = \dfrac{-\cos 18^\circ}{\text{sen } 18^\circ} = -\dfrac{1}{\text{tg } 18^\circ} = -\dfrac{1}{0{,}32} = -3{,}12$

vii. $342^\circ = -18^\circ$



$\text{sen}\left(-18^\circ\right) = -\text{sen } 18^\circ = -0{,}30$

$\cos\left(-18^\circ\right) = \cos 18^\circ = 0{,}95$

$\text{tg}\left(-18^\circ\right) = \dfrac{\text{sen}\left(-18^\circ\right)}{\cos\left(-18\right)^\circ} = \dfrac{-\text{sen } 18^\circ}{\cos 18^\circ} = -\text{tg } 18^\circ = -0{,}32$

6. Sabiendo que tg $\alpha = \frac{1}{2}$ siendo $0 < \alpha < 90$ y cos $\beta = -\frac{3}{5}$ siendo $90 < \beta < 180$ calcular:

a) sen 2α
b) tg 2β
c) sen $(\alpha+\beta)$
d) tg $(\beta-\alpha)$
e) $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$
f) $\text{sen}\left(\frac{\beta}{2} - 2\alpha\right)$

Solución.

El primer paso es calcular las rezones trigonométricas de α y β que no conocemos.

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{2} \text{ siendo } 0 < \alpha < 90 \Rightarrow \alpha \in 1^{\circ}\text{ Cuadrante} : \begin{cases} \text{seno} + \\ \text{coseno} + \\ \text{tangente} + \end{cases}$$

Conocido el valor de la tangente se obtienen la secante y, de esta el coseno

$$\text{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha : \sec\alpha = \pm\sqrt{\text{tag}^2\alpha + 1} = +\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Con la secante se obtiene el coseno

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} : \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}/2} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Conocidos los valores del coseno y la tangente se calcula el valor del seno.

$$\text{tag}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} : \text{sen}\ \alpha = \cos\alpha \cdot \text{tag}\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\beta = -\frac{3}{5} \text{ siendo } 90 < \beta < 180 \Rightarrow \alpha \in 2^{\circ}\text{ Cuadrante} : \begin{cases} \text{seno} + \\ \text{coseno} - \\ \text{tangente} + \end{cases}$$

Partiendo del coseno se calcula el seno y, con el seno y el coseno la tangente.

$$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 : \text{sen}\ \beta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\beta} = +\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg}\ \beta = \frac{\text{sen}\ \beta}{\cos\beta} = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$$

Conocidas las razones trigonométricas de α y β, se resuelven los apartados del ejercicio.

a) $\text{Sen}\ 2\alpha = 2\ \text{sen}\ \alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{6\sqrt{5}}{25}$

b) $\text{tg}\ 2\alpha = \frac{2\ \text{tg}\ \alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$

c) $\text{sen}\left(\alpha + \beta\right) = \text{sen}\ \alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\ \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4}{5} =$

$$= \frac{-3\sqrt{5}}{25} + \frac{8\sqrt{5}}{25} = \frac{5\sqrt{5}}{25} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

d) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{6}}=\dfrac{\frac{11}{6}}{\frac{2}{6}}=\dfrac{11}{2}$

e) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2}}=\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{10}}$

f) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\beta}{2}-2\alpha\right)=\operatorname{sen}\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos 2\alpha-\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\operatorname{sen}2\alpha=$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}\cdot\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\right)-\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}\cdot 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha=$$

$$=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}\cdot\left(\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\right)-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}\cdot 2\,\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\sqrt{\frac{8}{10}}\cdot\frac{15}{25}-\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\frac{4}{5}=$$

$$=\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot\frac{3}{5}-\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\frac{4}{5}=\frac{6}{5\sqrt{5}}-\frac{4}{5\sqrt{5}}=\frac{2}{5\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

7. Calcular: $\dfrac{\operatorname{sen}105^\circ+\operatorname{sen}15^\circ}{\cos 75^\circ-\cos 15^\circ}$

Solución.

Aplicando las expresiones de transformación de sumas en productos:

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A-\cos B=-2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\frac{\operatorname{sen}105^\circ+\operatorname{sen}15^\circ}{\cos 75^\circ-\cos 15^\circ}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{105^\circ+15^\circ}{2}\cdot\cos\frac{105^\circ-15^\circ}{2}}{-2\operatorname{sen}\frac{105^\circ+15^\circ}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{105^\circ-15^\circ}{2}}=\frac{2\operatorname{sen}60^\circ\cdot\cos 45^\circ}{-2\operatorname{sen}60^\circ\cdot\operatorname{sen}45^\circ}=-\frac{\cos 45^\circ}{\operatorname{sen}45^\circ}=-\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}45^\circ}{\cos 45^\circ}}=$$

$$=-\frac{1}{\operatorname{tg}45^\circ}=-\frac{1}{1}=-1$$

8. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\operatorname{sen}\alpha\cdot\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Solución.

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{sen}\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha}=\operatorname{sen}\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\cos\alpha$$

b) $\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\left(\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$

Solución.

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha}\right)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)=$$

c) Sen 3 + $\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos^2\alpha$

Solución.

Primero se calcula el sen 3α

$$\operatorname{sen}3\alpha=\operatorname{sen}(2\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha+\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\right)\cdot\operatorname{sen}\alpha=$$

$$= 2\,\text{sen a}\cdot\cos^2 a + \cos^2 a\cdot\text{sen a} - \text{sen}^3 a = 3\,\text{sen a}\cdot\cos^2 a - \text{sen}^3 a$$

Conocido el sen 3α, se simplifica la expresion.

Sen 3α + sen $\alpha\cdot\cos^2\alpha$ = $= 3\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha - \text{sen}^3\alpha + \text{sen}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha = 4\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha - \text{sen}^3\alpha$

d) $\sqrt{1-\text{sen}\alpha}\cdot\sqrt{1+\text{sen}\alpha}$

Solución.

$$\sqrt{1-\text{sen}\alpha}\cdot\sqrt{1+\text{sen}\alpha} = \sqrt{(1-\text{sen}\alpha)\cdot(1+\text{sen}\alpha)} = \sqrt{1^2 - \text{sen}^2\alpha} = \sqrt{\cos^2\alpha} = \cos\alpha$$

e) $\text{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha$

Solución.

$$\text{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = \left(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\cdot\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right) = 1\cdot\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right) = -\left(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\right) = -\cos 2\alpha$$

f) $\cos^3\alpha + \cos^2\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^3\alpha$

Solución.

$$\cos^3\alpha + \cos^2\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^3\alpha = \cos^3\alpha + \cos\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^3\alpha + \cos^2\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha =$$
$$= \cos\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha\right) + \text{sen}\,\alpha\cdot\left(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = \cos\alpha\cdot 1 + \text{sen}\,\alpha\cdot 1 = \text{sen}\,\alpha + \cos\alpha$$

g) $\dfrac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha}$

Solución.

$$\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\left(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\right)\cdot\left(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha\right)} = \frac{1}{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

h) $\dfrac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}$

Solución.

$$\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{-\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right)}{\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha} = -1$$

i) $\dfrac{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sec^2\alpha - \cos^2\alpha}$

Solución.

$$\frac{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sec^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \cos^2\alpha} = \frac{\dfrac{1+\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1+\cos^4\alpha}{1-\cos^4\alpha}$$

j) $\dfrac{\text{cosec}\,\alpha}{1+\text{ctg}^2\alpha}$

Solución.

$$\frac{\text{cosec}\,\alpha}{1+\text{ctg}^2\alpha} = \frac{\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}}{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}} = \frac{\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}}{\dfrac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}} = \frac{\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}}{\dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha}} = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \text{sen}\,\alpha$$

k) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\text{sen}\alpha}$

Solución.

$$\frac{\cos^2\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha} = \frac{1-\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha} = \frac{(1+\text{sen}\,\alpha)\cdot(1-\text{sen}\,\alpha)}{1-\text{sen}\,\alpha} = 1+\text{sen}\,\alpha$$

9. Demostrar si son verdaderas o falsas las siguientes ecuaciones:
Solución.

a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\dfrac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$$

b) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}$

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\cos 2\alpha}=\sec 2\alpha$$

c) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$$

d) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha\cdot\left(1-\operatorname{sen}^2\alpha\right)}{\operatorname{sen}^2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

e) $\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\beta=\operatorname{sen}^2\beta-\cos^2\alpha$

$$\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\beta=\left(1-\cos^2\alpha\right)-\left(1-\operatorname{sen}^2\beta\right)=1-\cos^2\alpha-1+\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}^2\beta-\cos^2\alpha$$

f) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\right)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

g) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}$

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}$$

h) $\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta$

$$\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta=\cos^2\alpha\cdot\left(1-\operatorname{sen}^2\beta\right)-\left(1-\cos^2\alpha\right)\cdot\operatorname{sen}^2\beta=$$

$$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta$$

i) $\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=1$

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=1$$

j) $(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)^2 + (\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$

$$(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)^2+(\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha)^2=\text{sen}^2\alpha+2\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha-2\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=$$
$$=\left(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+\left(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=1+1=2$$

k) $\text{ctg}\alpha-\dfrac{\text{ctg}^2\alpha-1}{\text{ctg}\alpha}=\text{tg}\alpha$

$$\text{ctg}\alpha-\frac{\text{ctg}^2\alpha-1}{\text{ctg}\alpha}=\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}-\frac{\dfrac{1}{\text{tg}^2\alpha}-1}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}-\frac{\dfrac{1-\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha}}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}-\frac{\text{tg}\,\alpha\cdot\left(1-\text{tg}^2\alpha\right)}{\text{tg}^2\alpha}=$$
$$=\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}-\frac{1-\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}\,\alpha}=\frac{1-\left(1-\text{tg}^2\alpha\right)}{\text{tg}\,\alpha}=\frac{1-1+\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}\,\alpha}=\frac{\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}\,\alpha}=\text{tg}\,\alpha$$

l) $\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{\text{ctg}\alpha}=\dfrac{\text{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$\frac{1+\text{tg}^2\alpha}{\text{ctg}\alpha}=\frac{1+\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\frac{\text{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}$$

m) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha+\text{cosec}\,\alpha}=\cos\alpha$

$$\frac{\text{sen}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha+\text{cosec}\,\alpha}=\frac{\text{sen}\,\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}{\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}}=\frac{\dfrac{\text{sen}^2\alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}{\dfrac{\text{sen}^2\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha}}=\frac{\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}}{\dfrac{1}{\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha}}=\frac{\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha}=\cos\alpha$$

n) $\dfrac{1-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}$

$$\frac{1-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{(1-\text{sen}\,\alpha)\cdot(1+\text{sen}\,\alpha)}{\cos\alpha\cdot(1+\text{sen}\,\alpha)}=\frac{1^2-\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha\cdot(1+\text{sen}\,\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot(1+\text{sen}\,\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}$$

o) $\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha=2\,\text{cosec}\,2\alpha$

$$\text{tg}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}=\frac{\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha}=\frac{2}{2\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha}=\frac{2}{\cos2\alpha}=2\,\text{cosec}\,2\alpha$$

p) $\text{sen}\,2\alpha=\dfrac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}$

$$\frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\frac{2\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{2\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{2\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{2\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=2\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha=\text{sen}\,2\alpha$$

q) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)}=\text{tg}\beta$

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta-\left[\cos\alpha\cdot\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta\right]}{\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta+\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta}=$$
$$=\frac{2\,\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta}{2\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}=\text{tg}\beta$$

r) $2\cdot \text{tg}\ \alpha = \text{sen}\ 2\alpha\ \sec^2\alpha$

$$\text{sen}\ 2\alpha \cdot \sec^2 \alpha = 2\,\text{sen}\ \alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} = 2\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = 2\ \text{tg}\ \alpha$$

s) $\text{sen}\ (\alpha+\beta)\cdot \text{sen}\ (\alpha-\beta) = \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\beta$

$$\text{sen}(\alpha+\beta)\cdot\text{sen}(\alpha-\beta) = (\text{sen}\ \alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\text{sen}\ \beta)\cdot(\text{sen}\ \alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\text{sen}\ \beta) =$$

$$= (\text{sen}\ \alpha\cdot\cos\beta)^2 - (\cos\alpha\cdot\text{sen}\ \beta)^2 = \text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\beta - \cos^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta =$$

$$= \text{sen}^2\alpha\cdot(1-\text{sen}^2\beta) - (1-\text{sen}^2\alpha)\cdot\text{sen}^2\beta = \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta - \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta =$$

$$= \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\beta$$

t) $\cos^2\alpha = \sqrt{1+\cos 2\alpha}$

$$\cos^2\alpha = \sqrt{1+\cos 2\alpha} = \sqrt{1+\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha} = \sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\alpha} = \sqrt{2\cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{2}\cos\alpha$$

No se cumple

u) $\text{tg}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \text{tg}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha$

$$\text{tg}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \text{sen}^2\alpha = \frac{\text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\text{sen}^2\alpha = \text{tg}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha$$

v) $\text{sen}^3\alpha\cdot(1+\text{cotg}\ \alpha) + \cos^3\alpha\cdot(1+\text{tg}\ \alpha) = \text{sen}\ \alpha + \cos\alpha$

$$\text{sen}^3\alpha\cdot(1+\text{ctg}\ \alpha) + \cos^3\alpha\cdot(1+\text{tg}\ \alpha) = \text{sen}^3\alpha\cdot\left(1+\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}\right) + \cos^3\alpha\cdot\left(1+\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}\right) =$$

$$= \text{sen}^3\alpha\cdot\frac{\text{sen}\ \alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha} + \cos^3\alpha\cdot\frac{\cos\alpha+\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \text{sen}^2\alpha\cdot(\text{sen}\ \alpha+\cos\alpha) + \cos^2\alpha\cdot(\cos\alpha+\text{sen}\ \alpha) =$$

$$= (\text{sen}\ \alpha+\cos\alpha)\cdot(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha) = (\text{sen}\ \alpha+\cos\alpha)\cdot 1 = \text{sen}\ \alpha+\cos\alpha$$

w) $\dfrac{\text{sen}\ \alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha} = 2\,\text{cosec}\ \alpha$

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{\text{sen}\ \alpha\cdot\text{sen}\ \alpha + (1+\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\cdot\text{sen}\ \alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)\cdot\text{sen}\ \alpha} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2\alpha + (1^2+2\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{(1+\cos\alpha)\cdot\text{sen}\ \alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+1+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\cdot\text{sen}\ \alpha} = \frac{1+1+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\cdot\text{sen}\ \alpha} = \frac{2+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\cdot\text{sen}\ \alpha} =$$

$$= \frac{2\cdot(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\cdot\text{sen}\ \alpha} = \frac{2}{\text{sen}\ \alpha} = 2\,\text{cosec}\ \alpha$$

x) $\sec^2\alpha + \text{cosec}^2\alpha = 4\,\text{cosec}^2 2\alpha$

$$\sec^2\alpha + \text{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha} = \frac{4}{4\cos^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{4}{(2\cos\alpha\cdot\text{sen}\ \alpha)^2} = \frac{4}{(\text{sen}\ 2\alpha)^2} = 4\,\text{cosec}^2 2\alpha$$

y) $\dfrac{\text{sen}\ \alpha+\text{sen}\ \beta}{\text{sen}\ \alpha-\text{sen}\ \beta} = \dfrac{\text{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\text{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{1+\cos(\alpha+\beta)}}}{\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{1+\cos(\alpha-\beta)}}}=\sqrt{\frac{\frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{1+\cos(\alpha+\beta)}}{\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{1+\cos(\alpha-\beta)}}}=\sqrt{\frac{(1-\cos(\alpha+\beta))\cdot(1+\cos(\alpha-\beta))}{(1-\cos(\alpha-\beta))\cdot(1+\cos(\alpha+\beta))}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{1+\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{1+\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{1-2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-((\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta))}{1-2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-((\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta))}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\left((\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2-(\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta)^2\right)}{1-2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\left((\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2-(\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta)^2\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\left(\cos^2\alpha\cdot\left(1-\operatorname{sen}^2\beta\right)-\left(1-\cos^2\alpha\right)\cdot\operatorname{sen}^2\beta\right)}{1-2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\left(\cos^2\alpha\cdot\left(1-\operatorname{sen}^2\beta\right)-\left(1-\cos^2\alpha\right)\cdot\operatorname{sen}^2\beta\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\left(\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta\right)}{1-2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\left(\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta\right)}{1-2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta\right)}}=\sqrt{\frac{1+2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta}{1-2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta-\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}^2\beta}{1-\cos^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}^2\beta}}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}^2\beta}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)^2}{(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)^2}}=\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta}\right)^2}=\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta}$$

z) $\sec 2\alpha=\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\cos 2\alpha}=\sec 2\alpha$$

aa) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2\cdot\operatorname{cosec}2\alpha$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{2}{2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2}{\operatorname{sen}2\alpha}=2\operatorname{cosec}2\alpha$$

bb) $\sec^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha + \text{tg}^2\alpha$

$$\sec^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha + \left(1 - \text{sen}^2\alpha\right)^2}{\cos^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2\alpha + 1 - 2\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha} = \frac{1 - \text{sen}^2\alpha + \text{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha + \text{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha} + \frac{\text{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \text{cosec}^2\alpha + \text{tg}^2\alpha$$

10. Demostrar que en todo triangulo rectángulo se cumple:

i. $\text{sen}\,\hat{B} \cdot \text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{b^2}{a \cdot c}$

ii. $\text{sen}\,2\hat{B} = \dfrac{2bc}{a^2}$

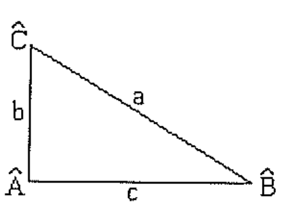
iii. $\text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{\text{sen}\,\hat{B} + \cos\hat{C}}{\cos\hat{B} + \text{sen}\,\hat{C}}$

iv. $\text{tg}\,\hat{A} + \text{tg}\,\hat{B} + \text{tg}\,\hat{C} = \text{tg}\,\hat{A} \cdot \text{tg}\,\hat{B} \cdot \text{tg}\,\hat{C}$

Solución.

i. $\text{sen}\,\hat{B} \cdot \text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{b^2}{a \cdot c}$

Por definición:

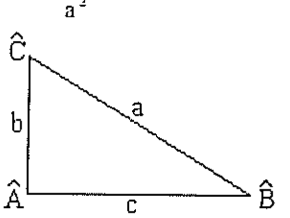


$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{sen}\,\hat{B} \cdot \text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b^2}{a \cdot c}$$

ii. $\text{sen}\,2\hat{B} = \dfrac{2bc}{a^2}$



$$\text{sen}\,2\hat{B} = 2\,\text{sen}\,\hat{B} \cdot \cos\hat{B}$$

$$2\,\text{sen}\,\hat{B} \cdot \cos\hat{B} = 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{2bc}{a^2}$$

iii. $\text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{\text{sen}\,\hat{B} + \cos\hat{C}}{\cos\hat{B} + \text{sen}\,\hat{C}}$

Si A, B y C son los ángulos de un triángulo, y A es el ángulo recto, se cumple $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$

$$\left.\begin{array}{r} \text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{\text{sen}\,\hat{B} + \cos\hat{C}}{\cos\hat{B} + \text{sen}\,\hat{C}} \\ \hat{C} = 90^\circ - \hat{B} \end{array}\right\} : \frac{\text{sen}\,\hat{B} + \cos\hat{C}}{\cos\hat{B} + \text{sen}\,\hat{C}} = \frac{\text{sen}\,\hat{B} + \cos\left(90^\circ - \hat{B}\right)}{\cos\hat{B} + \text{sen}\left(90^\circ - \hat{B}\right)} = \left\{\begin{array}{l} \cos(90 - \alpha) = \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,(90 - \alpha) = \cos\alpha \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{\text{sen}\,\hat{B} + \text{sen}\,\hat{B}}{\cos\hat{B} + \cos\hat{B}} = \frac{2\,\text{sen}\,\hat{B}}{2\cos\hat{B}} = \frac{\text{sen}\,\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \text{tg}\,\hat{B}$$

iv. $\operatorname{tg}\hat{A} + \operatorname{tg}\hat{B} + \operatorname{tg}\hat{C} = \operatorname{tg}\hat{A}\cdot\operatorname{tg}\hat{B}\cdot\operatorname{tg}\hat{C}$

Si A, B y C son los ángulos de un triángulo,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - \left(\hat{B} + \hat{C}\right)$$

Si dos ángulos son iguales, sus tangentes también lo serán:

$$\operatorname{tg}\hat{A} = \operatorname{tg}\left(180^\circ - \left(\hat{B} + \hat{C}\right)\right)$$

Para ángulos complementarios $\operatorname{tg}(180 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$$\operatorname{tg}\hat{A} = -\operatorname{tg}\left(\hat{B} + \hat{C}\right)$$

Desarrollando la tangente de la suma de ángulos.

$$\operatorname{tg}\hat{A} = -\frac{\operatorname{tg}\hat{B} + \operatorname{tg}\hat{C}}{1 - \operatorname{tg}\hat{B}\cdot\operatorname{tg}\hat{C}}$$

Ordenando la igualdad se llega expresión propuesta.

$$\operatorname{tg}\hat{A}\cdot\left(1 - \operatorname{tg}\hat{B}\cdot\operatorname{tg}\hat{C}\right) = -\left(\operatorname{tg}\hat{B} + \operatorname{tg}\hat{C}\right)$$

$$\operatorname{tg}\hat{A} - \operatorname{tg}\hat{A}\cdot\operatorname{tg}\hat{B}\cdot\operatorname{tg}\hat{C} = -\operatorname{tg}\hat{B} - \operatorname{tg}\hat{C}$$

$$\operatorname{tg}\hat{A}\cdot\operatorname{tg}\hat{B}\cdot\operatorname{tg}\hat{C} = \operatorname{tg}\hat{A} + \operatorname{tg}\hat{B} + \operatorname{tg}\hat{C}$$

11. Expresar sen 2α y cos 2α en función de tg α.

Se parte de la expresión de la tangente del ángulo mitad,

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

Haciendo el cambio: $\frac{a}{2} = \alpha \Rightarrow a = 2\alpha$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

De esta expresión se despeja el coseno del ángulo doble en función de la tangente del ángulo.

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$ Elevando al cuadrado se quita la raíz $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

$$\operatorname{tg}^2\alpha\cdot(1+\cos 2\alpha) = 1 - \cos 2\alpha \;:\; \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\cdot\cos 2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 1 - \operatorname{tg}^2\alpha \;:\; \cos 2\alpha\cdot\left(\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right) = 1 - \operatorname{tg}^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$$

El seno el ángulo doble se obtiene de la ecuación fundamental aplicada al ángulo doble y sustituyendo el coseno por su expresión en función de la tangente.

$$\operatorname{sen}^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 2\alpha + \left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}\right)^2 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 2\alpha = 1 - \left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}\right)^2 \;:\; \operatorname{sen}^2 2\alpha = 1 - \frac{\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)^2}{\left(\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)^2}$$

$$\operatorname{sen}^2 2\alpha = 1 - \frac{1^2 - 2\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^4\alpha + 2\operatorname{tg}^2\alpha + 1^2} = \frac{\left(\operatorname{tg}^4\alpha + 2\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right) - \left(1 - 2\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha\right)}{\operatorname{tg}^4\alpha + 2\operatorname{tg}^2\alpha + 1} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4\alpha + 2\operatorname{tg}^2\alpha + 1 - 1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^4\alpha + 2\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \frac{4\operatorname{tg}^2\alpha}{\left(\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right)^2}$$

$$\operatorname{sen}^2 2\alpha = \frac{4\operatorname{tg}^2\alpha}{\left(\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)^2} \;:\; \operatorname{sen} 2\alpha = \sqrt{\frac{4\operatorname{tg}^2\alpha}{\left(\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)^2}} \;:\; \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$$

5.S.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $senx = tgx$

Solución.

$$\text{sen}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$$

$$\text{sen } x \cdot \cos x = \text{sen } x \ : \quad \text{sen } x \cdot \cos x - \text{sen } x = 0 : \quad \text{sen } x \cdot (\cos x - 1) = 0 : \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ \cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

Casos:

i) Si $\text{sen}x = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pi = 180^\circ$ son soluciones de la ecuación.

ii) Si $\text{sen}x \neq 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0$ es la única solución de la ecuación, que implicaría además $senx = 0$, luego no puede ser.

b) $6\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos x + 1 = 0$

Solución.

$$6\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos x + 1 = 6\frac{\cos x + 1}{2} + \cos x + 1 = 0$$

$$3\cos x + 3 + \cos x + 1 = 0$$

$$4\cos x + 4 = 0$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k = 180^\circ + 360^\circ k$$

c) $2senx + 2\cos x = \sqrt{2}$

Solución.

$$2\text{sen}x + 2\cos x = \sqrt{2}$$

$$\text{sen}x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

elevando al cuadrado y desarrollando

$$(\text{sen}x + \cos x)^2 = \frac{1}{2} \quad : \quad \text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\text{sen}x \cos x = \frac{1}{2}$$

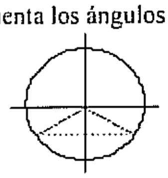
teniendo en cuenta que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, y despejando

$$2\text{sen}x \cos x = -\frac{1}{2}$$

mediante la definición de ángulo doble

$$\text{sen}(2x) = -\frac{1}{2}$$

teniendo en cuenta los ángulos asociados



$$\begin{cases} 2x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k = 210^\circ + 360 k \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{12} + \pi k = 105^\circ + 180^\circ k \\ 2x = \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi k = 330^\circ + 360 k \Rightarrow x = \dfrac{11\pi}{12} + \pi k = 165^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

d) $\cos(2x) = senx$

Solución.

$$\cos(2x) = \text{sen}x$$

por la definición de coseno del ángulo doble

$$\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \text{sen}x$$

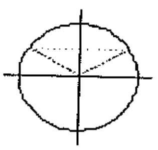
teniendo en cuenta la ecuación fundamental se despeja el $\cos^2 x$ en función del $\text{sen}^2 x$

$$\left(1 - \text{sen}^2 x\right) - \text{sen}^2 x = \text{sen}x$$

ordenando se obtiene una ecuación de segundo grado en función del sen x

$$2\text{sen}^2 x + \text{sen}x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} : \begin{cases} \text{sen}x = \frac{1}{2} \\ \text{sen}x = -1 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta los ángulos asociados



$$\begin{cases} senx = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k = 30° + 360k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k = 150° + 360k \end{cases} \\ senx = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k = 270° + 360k \end{cases}$$

e) $senx - \cos x = 0$

Solución.

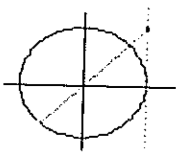
$$\text{sen}x - \cos x = 0$$

$$\text{sen}x = \cos x$$

dividiendo ambos miembros de la igualdad por cos x

$$\text{tg}x = 1$$

Teniendo en cuenta los ángulos asociados



$$tgx = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k = 45° + 360k \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k = 225° + 360k \end{cases}$$

f) $\cos(2x) = 2sen(2x)$

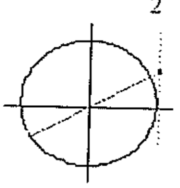
Solución.

$$\cos(2x) = 2\text{sen}(2x)$$

dividiendo toda la ecuación por 2cos(2x)

$$\text{tg}(2x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$



$$\begin{cases} 2x \cong 0{,}148\pi + 2\pi k = 26°33'54'' + 360k \Rightarrow x \cong 0{,}074\pi + 2\pi k = 13°16'57'' + 360k \\ 2x \cong 1{,}148\pi + 2\pi k = 206°33'54'' + 360k \Rightarrow x \cong 1{,}074\pi + 2\pi k = 103°16'57'' + 360k \end{cases}$$

g) $2sen^2x + 3\cos x = 0$

Solución.

Se transforma en una ecuación de segundo grado en función del cos x

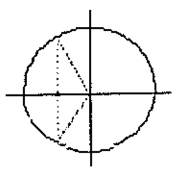
$$2sen^2 x + 3\cos x = 0$$

$$2\left(1 - \cos^2 x\right) + 3\cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 : \cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} : \begin{cases} \cos x = 2 \\ \cos x = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$\cos x = 2$ no tiene sentido ya que el coseno está acotado en $[-1, 1]$

$$\cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow$$



$$\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k = 120^o + 360k \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k = 240^o + 360k \end{cases}$$

h) $senx - \sqrt{3}\cos x = 0$

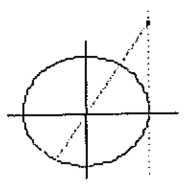
Solución.

Se transforma a tg x

$$senx - \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$senx = \sqrt{3}\cos x \xrightarrow{\div \cos x} \frac{senx}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{\cos x}$$

$$tgx = \sqrt{3}$$



$$tgx = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k = 60^o + 360k \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k = 240^o + 360k \end{cases}$$

i) $\cos(2x) + 1 = \cos x$

Solución.

Se transforma en una ecuación de segundo grado en función del cos x

$$\cos(2x) + 1 = \cos x$$

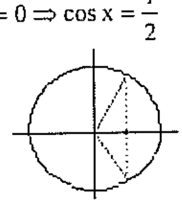
$$\cos^2 x - sen^2 x + 1 = \cos x$$

$$\cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) + 1 = \cos x$$

$$2\cos^2 x = \cos x \ ; \ \ 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos x \cdot (2\cos x - 1) = 0 : \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 = 360^o k = 2\pi k \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k = 270^o + 360^o k \end{cases} \\ 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$



$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k = 60^o + 360k \\ x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k = 300^o + 360k \end{cases}$$

j) $cos(2x) + senx = sen(3x)$

Solución.

Aplicando transformaciones de sumas en producto se obtiene una ecuación equivalente.

$$\cos(2x) + \text{sen}x = \text{sen}(3x)$$

$$\cos(2x) = \text{sen}(3x) - \text{sen}x$$

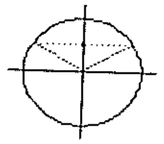
$$\cos(2x) = 2\cos\left(\frac{3x + x}{2}\right) \cdot \text{sen}\,\frac{3x - x}{2}$$

$$\cos(2x) = 2\cos 2x \cdot \text{sen}\,x$$

$$\cos(2x) - 2\cos 2x \cdot \text{sen}\,x = 0$$

$$\cos(2x) \cdot (1 - 2\text{sen}\,x) = 0 : \begin{cases} \cos(2x) = 0 \\ 1 - 2\text{sen}\,x = 0 \end{cases}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k = 90° + 180° k$$

$senx = \frac{1}{2}$  $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k = 30° + 360 k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k = 150° + 360 k \end{cases}$

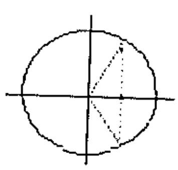
k) $2\cos^2 x + 3\cos x = 2$

Solución.

$$2\cos^2 x + 3\cos x = 2$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} : \begin{cases} \cos x = -2 \notin [-1, 1] \text{ no tiene sentido} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow$  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k = 60° + 360 k \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k = 300° + 360 k \end{cases}$

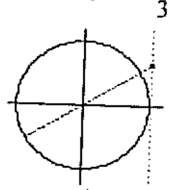
l) $\cos^2 x - 3sen^2 x = 0$

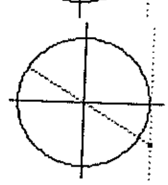
Solución.

$$\cos^2 x - 3\text{sen}^2 x = 0$$

$$\cos^2 x = 3\text{sen}^2 x \xrightarrow{\div 3\cos^2 x} \frac{3\text{sen}^2 x}{3\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{3\cos^2 x}$$

$$\text{tg}^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{tg}x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\text{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k = 30° + 360° k \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k = 210° + 360° k \end{cases}$

$\text{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k = 150° + 360° k \\ x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k = 330° + 360° k \end{cases}$

m) $sen^2 x - 3senx\cos x + 2\cos^2 x = 0$

Solución.

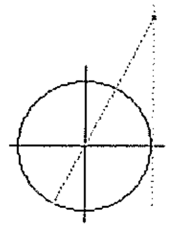
Se transforma en una ecuación de segundo grado dividiendo todos los términos de la ecuación por $\cos^2 x$.

$$\mathrm{sen}^2 x - 3\mathrm{sen}x\cos x + 2\cos^2 x = 0$$

$$\frac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\mathrm{sen}x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

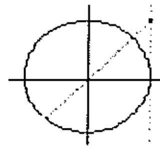
$$\mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}\,x + 2 = 0\ :\ \ \mathrm{tg}\,x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm 1}{2}$$

$\mathrm{tg}x = 2 \Rightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} x \cong \frac{7\pi}{20} + 2\pi k = 63°\,26'\,58'' + 360° k \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k = 210° + 360° k \end{cases}$$

$\mathrm{tg}x = 2 \Rightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k = 45° + 360\,k \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k = 225° + 360\,k \end{cases}$$

n) $tg(2x) = -tgx$

Solución.

Se transforma la igualdad en función de sen x y cos x.

$$\mathrm{tg}(2x) = -\mathrm{tg}x$$

$$\frac{\mathrm{sen}(2x)}{\cos(2x)} = -\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$$

$$\frac{2\mathrm{sen}x\cos x}{\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x} = -\frac{\mathrm{sen}x}{\cos x}$$

$$2\mathrm{sen}\,x\cdot\cos^2 x = -\mathrm{sen}\,x\cdot\cos^2 x + \mathrm{sen}^3 x$$

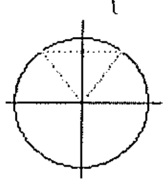
$$\mathrm{sen}^3 x - 3\mathrm{sen}\,x\cdot\cos^2 x = 0$$

$$\mathrm{sen}^3 x - 3\mathrm{sen}\,x\cdot\left(1 - \mathrm{sen}^2 x\right) = 0$$

$$4\mathrm{sen}^3 x - 3\mathrm{sen}\,x = 0$$

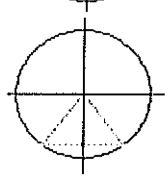
$$\mathrm{sen}\,x\cdot\left(4\mathrm{sen}^2 x - 3\right) = 0 : \begin{cases} \mathrm{sen}\,x = 0 : x = 0 = \pi k = 180°\,k \\ 4\mathrm{sen}^2 x - 3 = 0 : \mathrm{sen}\,x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\pm\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\mathrm{sen}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k = 60° + 360° k \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 120° + 360° k \end{cases}$$

$\mathrm{sen}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



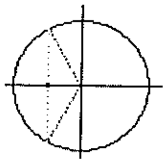
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 240° + 360° k \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k = 360° + 300° k \end{cases}$$

o) $sen^2 x - \cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

Solución.

Teniendo en cuenta la definición de coseno del ángulo doble, se transforma la expresión

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$$
$$-\cos(2x) = \frac{1}{2}$$
$$\cos(2x) = -\frac{1}{2}$$

$\cos(2x) = -\dfrac{1}{2}$  $\begin{cases} 2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k = 120° + 360° k \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k = 60° + 180° k \\ 2x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k = 240° + 360° k \Longrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3} + \pi k = 120° + 180° k \end{cases}$

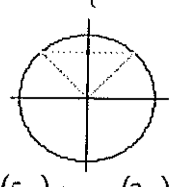
p) $tgx \cdot \sec x = \sqrt{2}$

Solución.

$$\operatorname{tg} x \sec x = \sqrt{2}$$
$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$$
$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{2}$$
$$\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - \sqrt{2} = 0$$

Ecuación de segundo grado en función de sen x

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1 \pm 3}{2\sqrt{2}} : \begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{-4}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \notin [-1, 1] \Rightarrow \text{No válida} \end{cases}$$

$\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$  $\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k = 45° + 360° k \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k = 135° + 360° k \end{cases}$

q) $\cos(2x) - \cos(6x) = sen(5x) + sen(3x)$

Solución.

$$\cos(2x) - \cos(6x) = \operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(3x)$$

Aplicando a los dos miembros de la ecuación las transformaciones de sumas en producto se obtiene una expresión equivalente de la que se pueden obtener soluciones.

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(3x) = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{5x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{5x-3x}{2}\right) = 2\operatorname{sen}(4x) \cdot \cos x \\ \cos(2x) - \cos(6x) = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{2x+6x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{2x-6x}{2}\right) = -2\operatorname{sen}(4x) \cdot \operatorname{sen}(-2x) \end{cases}$$

igualando

$$-2\operatorname{sen}(4x) \cdot \operatorname{sen}(-2x) = 2\operatorname{sen}(4x) \cdot \cos(x)$$

Teniendo en cuenta las razones trigonométricas de ángulos opuestos $(\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha)$

$\operatorname{sen}(4x) \cdot \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(4x) \cdot \cos x$

$\operatorname{sen}(4x) \cdot \operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(4x) \cdot \cos x = 0$

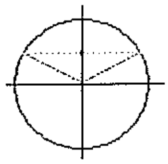
$$\operatorname{sen}(4x)\cdot(\operatorname{sen}(2x)-\cos x)=0:\begin{cases}\operatorname{sen}(4x)=0\\ \operatorname{sen}(2x)-\cos x=0\end{cases}$$

$$\operatorname{sen}(4x)=0:4x=0=\pi k=180^\circ k\Rightarrow x=0=\frac{\pi}{4}k=45^\circ k$$

$$\operatorname{sen}(2x)-\cos x=0$$

$$2\operatorname{sen}x\cos x-\cos x=0$$

$$\cos x\cdot(2\operatorname{sen}x-1)=0:\begin{cases}\cos x=0:x=90^\circ+180^\circ k=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ 2\operatorname{sen}x-1=0:\operatorname{sen}x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$  $\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k=30^\circ+360^\circ k\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k=150^\circ+360^\circ k\end{cases}$

r) $2tgx-3\cot gx-1=0$

Solución.

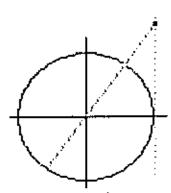
$$2\operatorname{tg}x-3\operatorname{cotg}x-1=0$$

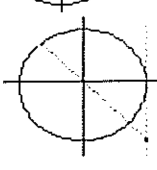
$$2\operatorname{tg}x-3\frac{1}{\operatorname{tg}x}-1=0$$

Multiplicando la igualdad por tg x, se transforma en una ecuación de segundo grado en función de tg x

$$2\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x-3=0$$

$$\operatorname{tg}x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}:\begin{cases}\operatorname{tg}x=\dfrac{3}{2}\\ \operatorname{tg}x=-1\end{cases}$$

$\operatorname{tg}x=\frac{3}{2}\Rightarrow$  $\Rightarrow x\cong\frac{31\pi}{100}+\pi k=56^\circ\,18'35''+180^\circ k$

$\operatorname{tg}x=-1$  $\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}+\pi k=135^\circ+180^\circ k$

s) $3\cos x=2\sec x-5$

Solución.

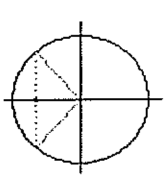
$$3\cos x=2\sec x-5$$

$$3\cos x=\frac{2}{\cos x}-5$$

Multiplicando toda la ecuación por cos x se obtiene una ecuación de segundo grado

$$3\cos^2x+5\cos x-2=0$$

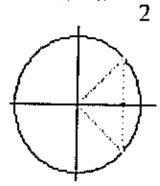
$$\cos x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}:\begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{3}\\ \cos x=-2\notin[-1,1]\Rightarrow\text{No válida}\end{cases}$$

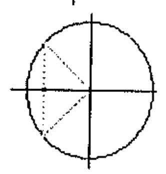
$\cos x=-\frac{1}{3}$  $\begin{cases}x\cong\dfrac{39\pi}{100}+2\pi k=70^\circ 31'44''+360^\circ k\\ x\cong\dfrac{161\pi}{100}+2\pi k=289^\circ 28'16''+360^\circ k\end{cases}$

t) $\cos(2x) = 5 - 6\cos^2 x$

Solución.

$$\cos(2x) = 5 - 6\cos^2 x$$
$$\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 5 - 6\cos^2 x$$
$$\cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) = 5 - 6\cos^2 x$$
$$8\cos^2 x = 4$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$  $\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k = 45° + 360° k \\ x = \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k = 315° + 360° k \end{cases}$

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$  $\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k = 135° + 360° k \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k = 225° + 360° k \end{cases}$

u) $\text{cosec}\,\alpha \cdot \sec\alpha \cdot \cos^2\alpha + tg\,\alpha = \text{cotg}\,\alpha$

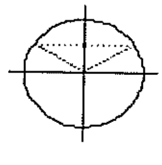
Solución.

$$\text{cosec}\,x \cdot \sec x \cdot \cos^2 x + \text{tg}\,x = \text{cotg}\,x$$
$$\frac{1}{\text{sen}\,x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \cos^2 x + \text{tg}\,x = \text{cotg}\,x$$
$$\frac{\cos x}{\text{sen}\,x} + \text{tg}\,x = \text{cotg}\,x$$
$$\text{cotg}\,x + \text{tg}\,x = \text{cotg}\,x$$
$$\text{tg}\,x = 0 \Rightarrow x = 0 = 180° k = \pi k$$

v) $2\,\text{sen}\,x + 1 = \text{cosec}\,x$

Solución.

$$2\,\text{sen}\,x + 1 = \text{cosec}\,x$$
$$2\,\text{sen}\,x + 1 = \frac{1}{\text{sen}\,x}$$
$$2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\,x - 1 = 0$$
$$\text{sen}\,x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} : \begin{cases} \text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}\,x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k = 270° + 360° k \end{cases}$$

$\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}$  $\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k = 30° + 360 k \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k = 150° + 360 k \end{cases}$

w) $\sec x + tgx = 2$

Solución.

$$\sec x + \operatorname{tg} x = 2$$

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 2$$

$$\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = 2$$

$$1 + \operatorname{sen} x = 2\cos x$$

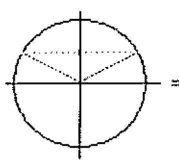
$$1 + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x = 4\cos^2 x$$

$$1 + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x = 4\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)$$

$$5\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{10} : \begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} \\ \operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k = 270° + 360° k \end{cases}$$

$\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$



$$\Rightarrow \begin{cases} x \cong \frac{\pi}{5} + 2\pi k = 36°\,52'\,12'' + 360° k \\ x \cong \frac{4\pi}{5} + 2\pi k = 143°\,7'\,48'' + 360° k \end{cases}$$

x) $senx + \cos ecx = \dfrac{13}{6}$

Solución.

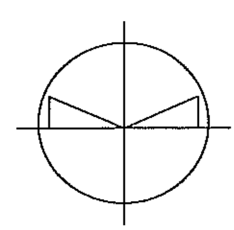
$$senx + \cos ecx = \frac{13}{6}$$

$$senx + \frac{1}{senx} = \frac{13}{6}$$

$$sen^2 x - \frac{13}{6} senx + 1 = 0$$

$$senx = \frac{\frac{13}{6} \pm \sqrt{\frac{169}{36} - 4}}{2} = \frac{\frac{13}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36}}}{2} = \frac{\frac{13}{6} \pm \frac{5}{6}}{2} = \frac{13 \pm 5}{12} .Casos:$$

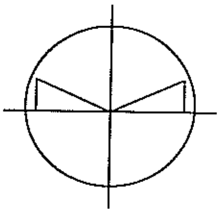
$$\begin{cases} senx = \dfrac{18}{12} \Rightarrow no \quad tiene \quad solución \\ senx = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x \cong \dfrac{23\pi}{100} = 41°48'37'' ; x \cong \dfrac{77\pi}{100} = 138°11'23'' \end{cases}$$



y) $\cos(2x) = senx$

Solución.

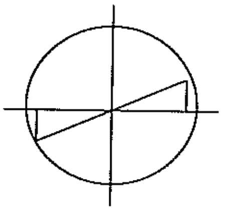
$$\cos(2x) = senx$$
$$\cos^2 x - sen^2x = senx$$
$$\left(1 - sen^2x\right) - sen^2x = senx$$
$$2sen^2x + senx - 1 = 0$$
$$senx = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}.Casos:$$
$$\begin{cases} senx = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} = 30^\circ ; x = \dfrac{5\pi}{6} = 150^\circ \\ senx = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} = 270^\circ \end{cases}$$



z) $tg^2x + 3 = 4tgx$

Solución.

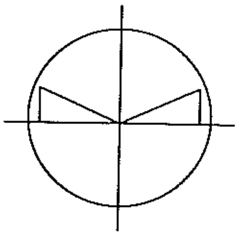
$$tg^2x + 3 = 4tgx$$
$$tg^2x - 4tgx + 3 = 0$$
$$tgx = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}.Casos:$$
$$\begin{cases} tgx = 3 \Rightarrow x \cong \dfrac{2\pi}{5} = 71^\circ 33'54'' ; x \cong \dfrac{7\pi}{5} = 251^\circ 33'54'' \\ tgx = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} = 45^\circ ; x = \dfrac{5\pi}{4} 225^\circ \end{cases}$$



aa) $\cos x - 2senx \cdot \cos x = 0$

Solución.

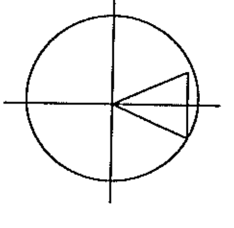
$$\cos x - 2senx \cdot \cos x = 0$$
$$\cos x(1 - 2senx) = 0.Casos:$$
$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} = 90^\circ ; x = \dfrac{3\pi}{2} = 270^\circ \\ 1 - 2senx = 0 \Rightarrow senx = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} = 30^\circ ; x = \dfrac{5\pi}{6} = 150^\circ \end{cases}$$



bb) $\cos x + \cos(3x) = \cos(2x)$

Solución.

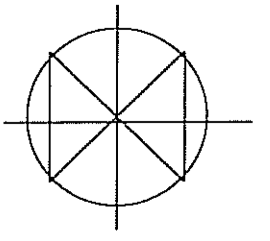
$$\cos x + \cos(3x) = \cos(2x)$$
$$Utilizamos: \cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos(3x) = \cos(2x)$$
$$2\cos(2x)\cos(-x) = \cos(2x).Casos:$$
$$\begin{cases} \cos(2x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} = 45^\circ ; x = \dfrac{3\pi}{4} = 135^\circ \\ \cos(-x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ ; x = \dfrac{5\pi}{3} = 300^\circ \end{cases}$$



cc) $2\cos^2 x + 4sen^2x = 3$

SOLUCIÓN:

$2\cos^2 x + 4sen^2x = 3$



$2(1 - sen^2x) + 4sen^2x = 3$

$2sen^2x = 1$

$sen^2x = \dfrac{1}{2}$

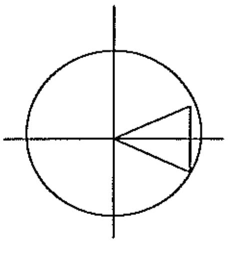
$senx = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} = 45°; x = \dfrac{3\pi}{4} = 135°; x = \dfrac{5\pi}{4} = 225°; x = \dfrac{7\pi}{4} = 315°$

dd) $\sec x + 4\cos x = 5$

Solución.

$\sec x + 4\cos x = 5$

$\dfrac{1}{\cos x} + 4\cos x = 5$



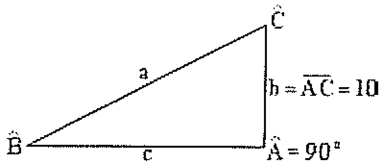
$4\cos^2 x - 5\cos x + 1 = 0$

$\cos x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \dfrac{5 \pm 3}{8}.Casos:$

$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x \cong \dfrac{21\pi}{50} = 75°31'21''; x \cong \dfrac{-21\pi}{50} = -75°31'21'' \end{cases}$

1. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, si sen B = 1/3 y que el lado AC es igual a 10cm. Calcular los otros lados de este triángulo.

Solución.



Mediante la definición de $\text{sen}\,\hat{B}$, se calcula el lado c.

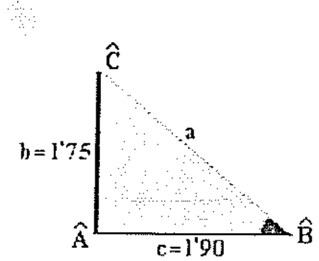
$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{10}{1/3} = 30\,\text{cm}$$

Conocidos un cateto (b) y la hipotenusa (a), y aplicando el teorema de Pitágoras, se calcula el cateto que falta (c).

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{30^2 - 10^2} = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$$

2. Un individuo cuya altura es de 1,75 m. proyecta una sombra de 1,90 m. Calcular las razones trigonométricas del ángulo que forman los rayos del Sol con la horizontal.

Solución.



Se pide calcular las razones trigonométricas del ángulo B, para lo cual hace falta la longitud de la hipotenusa, que se calcula mediante el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{1'75^2 + 1'90^2} = 2'58$$

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{a} = \frac{1'75}{2'58} = 0'68$$

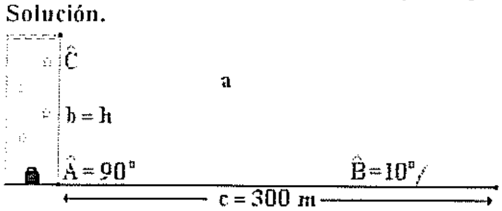
$$\cos\hat{B} = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{a} = \frac{1'90}{2'58} = 0'74$$

$$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{b}{c} = \frac{1'75}{1'90} = 0'92$$

Nota: Como norma general se usan tantos decimales como los que lleven los datos

3. Una torre se a 300 m de su pie, bajo un ángulo de 10°. Calcular su altura. Dato: sen10°=0'1736

Solución.



Aplicando la definición de de tangente al ángulo B se puede calcular la altura de la torre.

$$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{b}{c} = \frac{h}{300}$$

$$h = 300 \cdot \text{tg}\,\hat{B} = 300 \cdot \text{tg}\,10^\circ$$

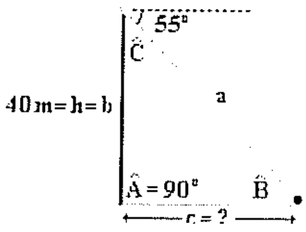
Cálculo de tg 10°.

$$\text{tg}\,10^\circ = \frac{\text{sen}\,10}{\cos 10} = \frac{\text{sen}\,10}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 10}} = \frac{0'1736}{\sqrt{1 - 0'1736^2}} = 0'1763$$

Se sustituyen en la expresión de la altura.

$$h = 300 \cdot \text{tg}\,10^\circ = 300 \cdot 0'1763 = 52'89\,\text{m}$$

4. Desde un faro situado a 40 m sobre el nivel del mar el ángulo de depresión de un barco es de 55°. ¿A qué distancia del faro se halla el barco?
Solución.



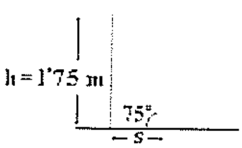
La distancia pedida se halla mediante la definición de tangete de $\hat{C}$, el ángulo $\hat{C}$ se calcula como complementario del ángulo de depresión.

$$\hat{C}=90-55=35°$$

$$\operatorname{tg}\hat{C}=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}=\frac{c}{b}=\frac{c}{40}$$

$$c=40\cdot\operatorname{tg}\hat{C}=40\cdot\operatorname{tg}35°=28\text{ m}$$

5. La altura máxima del sol sobre el horizonte se produce en Madrid al mediodía solar del 21 de junio, y es de 73°. ¿Qué sombra proyectaría un poste de 1'75 m?
Solución.

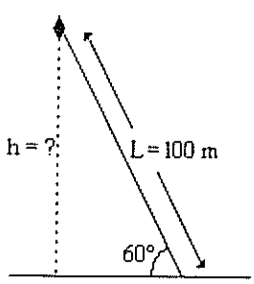


La longitud de la sombra se calcula con la definición de tangente de 75°.

$$\operatorname{tg}75°=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}=\frac{h}{s}$$

$$\operatorname{tg}75°=\frac{h}{s}\Rightarrow s=\frac{h}{\operatorname{tg}75°}=\frac{1'75}{\operatorname{tg}75°}=0'47\text{ m}$$

6. Una cometa esta unida al suelo por un hilo de 100 m, que forma con la horizontal del terreno un ángulo de 60°. Suponiendo que el hilo esta tirante, hallar a que altura sobre el suelo se encuentra la cometa.
Solución.

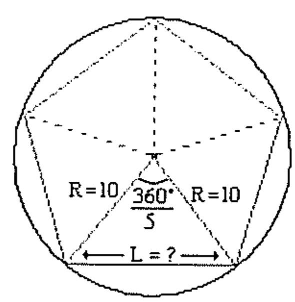


La altura a la que se encuentra la cometa se calcula mediante la definición de seno de 60°

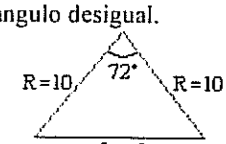
$$\operatorname{sen}60°=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}=\frac{h}{L}$$

$$\operatorname{sen}60°=\frac{h}{L}\qquad h=L\cdot\operatorname{sen}60°=100\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}\text{ m}$$

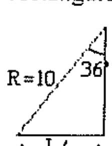
7. Calcular la longitud del lado y el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 10 cm.
Solución.



Un pentágono regular inscrito en una circunferencia se puede dividir en cinco triángulos isósceles de los que se conocería la longitud de los lados iguales (R) y el ángulo desigual.



Cada triángulo isósceles a su vez se puede dividir en dos triángulos rectángulos de los que se conocería un ángulo agudo y la hipotenusa.

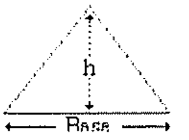


Aplicando la definición de seno de 36° se calcula la longitud del lado de triángulo (L/2) y de está, la del lado del pentágono regular.

$$\operatorname{sen}36°=\frac{L/2}{R}\qquad\frac{L}{2}=R\cdot\operatorname{sen}36°\qquad L=2R\cdot\operatorname{sen}36°=2\cdot10\operatorname{sen}36°\approx11'8\text{ cm}$$

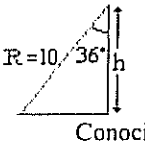
El área del pentágono se calcula como cinco veces la de uno cualquiera de los triángulos isósceles en el que lo hemos dividido.

$$A_{Pent} = 5A_{Tr}$$



El área del triángulo se calcula según su definición

$$A_{Tr} = \frac{1}{2} b \cdot h$$



Donde la base es la longitud del lado del pentágono y la altura se calcula de igual forma que el lado del pentágono solo que en este caso utilizando la definición de coseno de 36°.

$$\cos 36° = \frac{h}{R} \qquad h = R\cos 36° = 10\cos 36° \approx 8'1 \text{ cm}$$

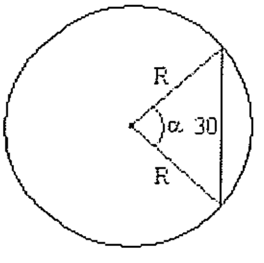
Conocida la base y la altura se calcula el área del triángulo, y multiplicando por cinco está, el área del pentágono.

$$A_{Tr} = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} 11'8 \cdot 8'1 \approx 47'6 \text{ cm}^2$$

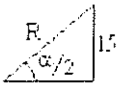
$$A_{Pent} = 5A_{Tr} = 5 \cdot 47'6 = 237'8 \text{ cm}^2$$

8. En una circunferencia de 50 cm de diámetro se traza una cuerda se 30 cm de longitud, cuanto mide el ángulo central.

Solución.



Los extremos de la cuerda y el centro de la circunferencia forman un triángulo isósceles del que conoceríamos las longitudes de todos sus lados, si se divide por la mitad del lado desigual se obtiene un triángulo rectángulo del que también conoceríamos las longitudes de sus lados. Aplicando la definición de seno de α/2 se puede calcular el ángulo α.



$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{15}{R} = \frac{15}{50}$$

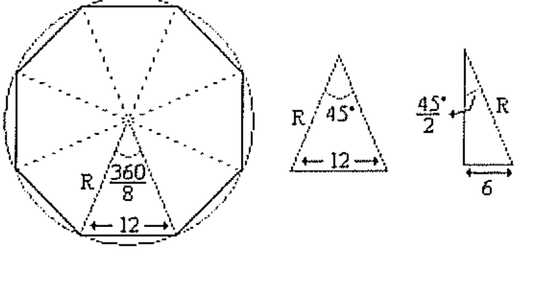
$$\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arcsen}\frac{15}{50} \qquad \alpha = 2 \cdot \operatorname{arcsen}\frac{15}{50} = 34'9°$$

9. La longitud del lado de un octógono regular es 12 cm. Hallar el radio de la circunferencia inscrita y circunscrita.

Solución.

Circunferencia circunscrita (por fuera).

Se divide la circunferencia en ocho triángulos isósceles de los que conoceríamos la longitud del lado desigual y del ángulo opuesto. A su vez, cada triángulo isósceles se divide en dos para obtener triángulos rectángulos, y del triángulo rectángulo obtenido se calcula la longintud del radio mediante la definición de 45/2.

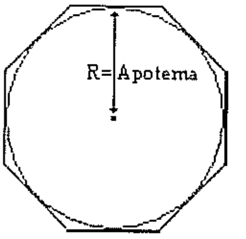


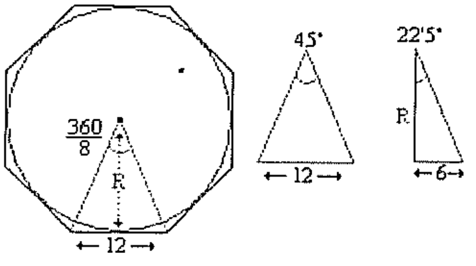
$$\operatorname{sen}\frac{45}{2} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{6}{R}$$

$$R = \frac{6}{\operatorname{sen} 22'5} = 15'7 \text{ cm}$$

Circunferencia inscrita (por dentro)

En este caso el radio de la circunferencia es la apotema del octógono.





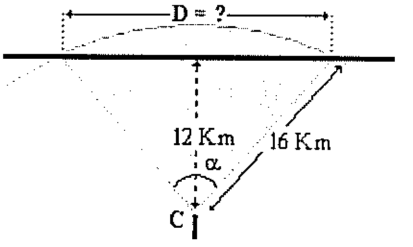
Se calcula de forma análoga al anterior, es decir, se divide el octógono en triángulos isósceles y de un triángulo isósceles se obtiene un triángulo rectangular dividiendo por la mitad. En el triángulo rectángulo, la definición de tangente de 22'5° permite calcular el radio de la circunferencia

$$\operatorname{tag}\frac{45}{2}=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}=\frac{6}{R} \qquad R=\frac{6}{\operatorname{tag}22'5}=14'5\ \text{cm}$$

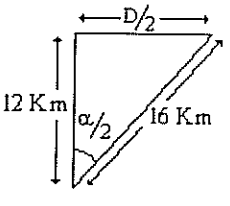
10. La distancia de un cañón a una carretera es de 12 Km. El alcance del cañón es de 16 Km. Suponiendo que la carretera es recta, ¿qué longitud de la carretera está dominada por el cañón? que ángulo sobre la carretera domina.

Solución.

Si sobre el cañón C se traza una circunferencia de radio 12 Km, está corta a la carretera como muestra la figura.



Se pide calcular la distancia D y el ángulo α.



Para ello se puede dividir el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos, por el punto medio del lado desigual, quedando el triángulo que muestra la figura. La distancia D se calcula mediante el teorema de Pitágoras. El ángulo α se calcula con la definición de cualquier razón trigonométrica del ángulo α/2

$$h^2=c^2+c^2 \qquad 16^2=12^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

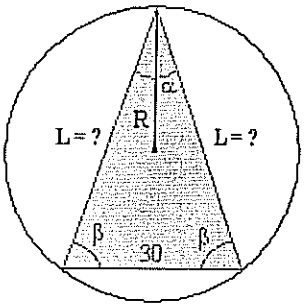
$$\left(\frac{D}{2}\right)^2=16^2-12^2 \qquad D=2\sqrt{16^2-12^2}=21'17\ \text{Km}$$

Por usar los datos del enunciado, el ángulo α lo calculo por la definición de coseno de α/2.

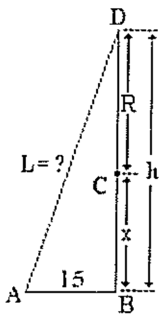
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{12}{16} \qquad \alpha=2\cdot\arccos\frac{12}{16}=82'8^\circ$$

11. Un triángulo isósceles esta inscrito en una circunferencia de 50 cm de diámetro, si el lado desigual es de 30 cm de longitud, calcular la longitud de los otros dos lados, los ángulos y el área.

Solución.



Se pide calcular la longitud de los lados iguales (L), los ángulos α y β, y el área del triángulo. Se empieza por calcular la longitud de los lados iguales, para ello se divide por la base el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos, obteniendo el triángulo ABD.

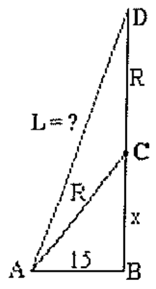


Aplicando Pitágoras al triángulo rectángulo

$$L^2 = 15^2 + h^2$$

Donde h = R + x

La longitud x se puede calcular en el triángulo ABC aplicando el teorema de Pitágoras:



$$R^2 = 15^2 + x^2 \qquad x = \sqrt{R^2 - 15^2}$$

$$R = \frac{D}{2} = \frac{50}{2} = 25\,\text{cm}$$

$$x = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$$

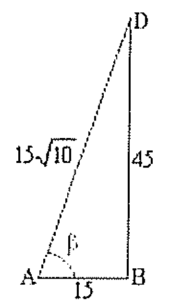
Conocido x se calcula h

$$h = 25 + 20 = 45$$

Conocido h se calcula L con la primera ecuación.

$$L^2 = 15^2 + 45^2 = 2250 \qquad L = \sqrt{2250} = 15\sqrt{10}$$

Ángulo β. Se calcula con la definición de cualquier razón trigonométrica del ángulo β.

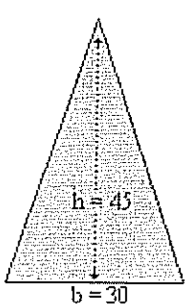


$$\cos\beta = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{15}{15\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\beta = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10} = 71'6^\circ$$

Conocido β y teniendo en cuenta que la suma de ángulos es igual a 180°, se calcula α.

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ \qquad \alpha = 180 - 2\beta = 180 - 2\cdot 71'6 = 36'8^\circ$$



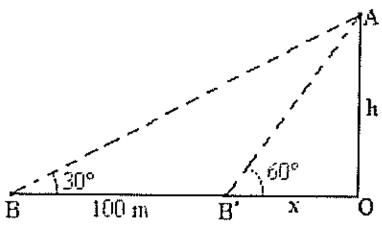
El área del triángulo se calcula por su definición

$$A = \frac{1}{2}\,b\cdot h = \frac{1}{2}30\cdot 45 = 675\,\text{cm}^2$$

12. Desde un barco se divisa el alto de una montaña bajo una visual que forma con la horizontal un ángulo de 60°. Si el barco se aleja 100 m. la nueva visual forma un ángulo de 30° con la horizontal. Calcular la altura de la montaña.

Solución.

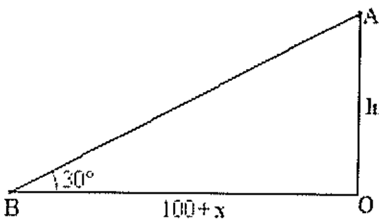
Problema de la doble observación ó doble tangente.



Se resuelve descomponiendo en dos triángulos rectángulos BOA y B'OA, y definiendo en cada uno de ellos la tangente del ángulo conocido en función de h y de x. Las dos ecuaciones permiten plantear un sistema del que se calcula h.

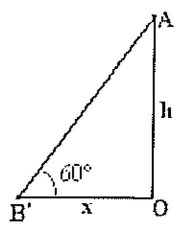
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

Triángulo AOB:



$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{100+x}$$

Triángulo AOB'



$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\text{Sistema:}\begin{cases} \operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{h}{100+x} \\ \operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{h}{x} \end{cases} : h = x \operatorname{tg} 60^\circ : \ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x \operatorname{tg} 60^\circ}{100+x}$$

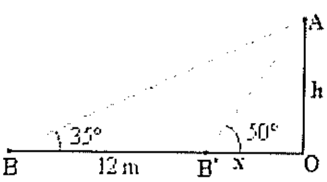
$$\operatorname{tg} 30^\circ (100+x) = x \operatorname{tg} 60^\circ \ : \ 100 \operatorname{tg} 30^\circ + x \operatorname{tg} 30^\circ = x \operatorname{tg} 60^\circ \ : \ 100 \operatorname{tg} 30^\circ = x \operatorname{tg} 60^\circ - x \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$100 \operatorname{tg} 30^\circ = x (\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) \ : \ x = \frac{100 \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} = 50 \text{ m}$$

$$h = x \operatorname{tg} 60^\circ = 50 \operatorname{tg} 60^\circ = 50\sqrt{3} \approx 86'6 \text{ m}$$

13. Al observar desde el suelo el punto más alto de un árbol, el ángulo de la visual y la horizontal mide 50°. Desde 12 m más atrás el ángulo es de 35°. Calcula la altura del árbol gráficamente y por técnicas trigonométricas.

Solución.



Problema de doble observación ó doble tangente.

$$\begin{cases} BOA : \operatorname{tg} 35^\circ = \dfrac{h}{12+x} \\ B'OA : \operatorname{tg} 50^\circ = \dfrac{h}{x} \end{cases} : h = x \operatorname{tg} 50^\circ : \ \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{x \operatorname{tg} 50^\circ}{12+x}$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ (12+x) = x \operatorname{tg} 50^\circ \ : \ 12 \operatorname{tg} 35^\circ + x \operatorname{tg} 35^\circ = x \operatorname{tg} 50^\circ \ : \ 12 \operatorname{tg} 35^\circ = x \operatorname{tg} 50^\circ - x \operatorname{tg} 35^\circ$$

$$12 \operatorname{tg} 35^\circ = x (\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ) \ : \ x = \frac{12 \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ} = 17'1 \text{ m}$$

$$h = x \operatorname{tg} 50^\circ = 17'1 \operatorname{tg} 50^\circ \approx 20'4 \text{ m}$$

14. Calcular la altura de un poste sabiendo que desde un cierto punto se ve bajo un ángulo de 7°. Si nos acercamos 20 m, lo veremos bajo un ángulo de 10°. Datos: tg 7° = 0,1228; tg 10° = 0,1763.

Solución.

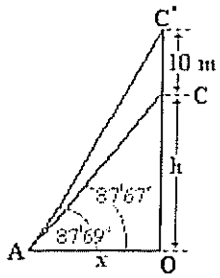
Problema de doble observación ó doble tangente. Igual que los dos anteriores, sus soluciones son:

x = 10'2 m **h = 3'7 m**

15. Se quiere calcular la altura de una colina situada al borde del mar, si colocamos un poste de 10 m sobre su punto más alto, desde un punto de la orilla del mar, se observan los vértices inferior y superior del poste bajo ángulos de 87'67° y 87'69° respectivamente. Calcular la altura de la colina sobre el nivel del mar.

Solución.

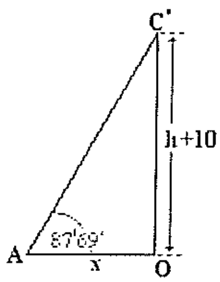
Problema de la doble observación ó doble tangente.



El problema se resuelve descomponiendo la figura en dos triángulos rectángulos AOC y AOC', y definiendo en cada uno de ellos la tangente del ángulo conocido en función de h y de x. Las dos ecuaciones permiten plantear un sistema del que se calcula h.

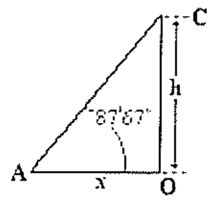
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

Triángulo AOC':



$$\operatorname{tg} 86'69° = \frac{h+10}{x}$$

Triángulo AOC:



$$\operatorname{tg} 86'67° = \frac{h}{x}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 86'69° = \dfrac{h+10}{x} \\ \operatorname{tg} 86'67° = \dfrac{h}{x} \end{cases} : h = x \operatorname{tg} 86'67° : \operatorname{tg} 86'69° = \frac{x \operatorname{tg} 86'67 + 10}{x}$$

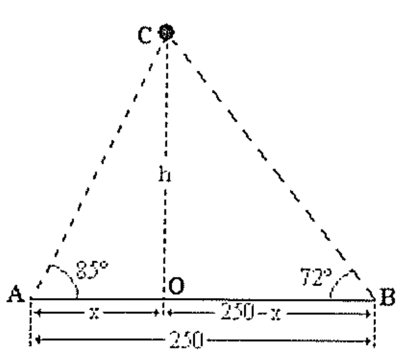
$$x \operatorname{tg} 86'69° = x \operatorname{tg} 86'67 + 10 \ : \ x \operatorname{tg} 86'69° - x \operatorname{tg} 86'67 = 10 \ : \ x\left(\operatorname{tg} 86'69° - \operatorname{tg} 86'67\right) = 10$$

$$x = \frac{10}{\operatorname{tg} 86'69° - \operatorname{tg} 86'67} = 96'1 \text{ m}$$

16. Dos observadores separados 250 m ven un globo estático situado entre ellos bajo ángulos de 72° y 85°. A que altura se encuentra el globo. A que distancia del globo se encuentra cada observador.

Solución.

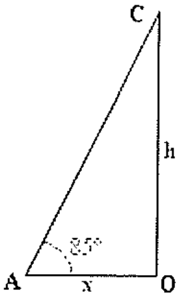
Problema de la doble observación ó doble tangente.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

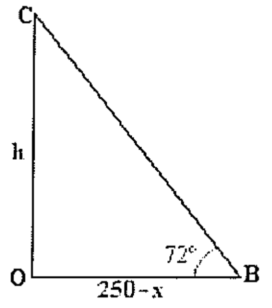
El problema se resuelve descomponiendo la figura en dos triángulos rectángulos AOC y BOC, y definiendo en cada uno de ellos la tangente del ángulo conocido en función de h y de x. Las dos ecuaciones permiten plantear un sistema del que se calcula h.

Triángulo AOC:



$$\operatorname{tg} 85^\circ = \frac{h}{x}$$

Triángulo BOC:



$$\operatorname{tg} 72^\circ = \frac{h}{250-x}$$

$$\text{Sistema:}\begin{cases} \operatorname{tg} 85^\circ = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 72^\circ = \dfrac{h}{250-x} \end{cases} : h = x \operatorname{tg} 85^\circ : \ \operatorname{tg} 72^\circ = \frac{x \operatorname{tg} 85^\circ}{250-x}$$

$$\operatorname{tg} 72^\circ (250-x) = x \operatorname{tg} 85^\circ \ : \ 250 \operatorname{tg} 72^\circ - x \operatorname{tg} 72^\circ = x \operatorname{tg} 85^\circ \ : \ 250 \operatorname{tg} 72^\circ = x \operatorname{tg} 85^\circ + x \operatorname{tg} 72^\circ$$

$$x \left(\operatorname{tg} 85^\circ + \operatorname{tg} 72^\circ\right) = 250 \operatorname{tg} 72^\circ \ : \ x = \frac{250 \operatorname{tg} 72^\circ}{\operatorname{tg} 85^\circ + \operatorname{tg} 72^\circ} \approx 53 \text{ m}$$

$$h = 53 \operatorname{tg} 85^\circ \approx 606'2 \text{ m}$$

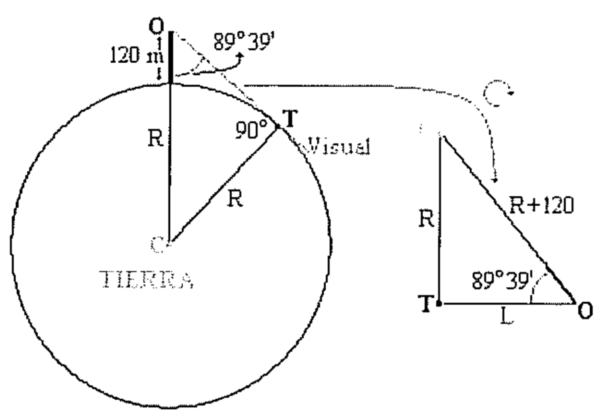
Las distancias de cada observador al globo se calculan con la definición de seno en cada uno de los triángulos.

- **Triángulo AOC:** $\operatorname{sen} 85^\circ = \dfrac{h}{\overline{AC}} : \overline{AC} = \dfrac{h}{\operatorname{sen} 85^\circ} = \dfrac{602'2}{\operatorname{sen} 85^\circ} \approx 604'3 \text{ m}$
- **Triángulo BOC:** $\operatorname{sen} 72^\circ = \dfrac{h}{\overline{BC}} : \overline{BC} = \dfrac{h}{\operatorname{sen} 72^\circ} = \dfrac{602'2}{\operatorname{sen} 72^\circ} \approx 633 \text{ m}$

17. Un observador colocado a una altura de 120 m sobre el nivel del mar, dirige la vista hacia el horizonte y ésta visual forma con la vertical un ángulo de 89°39'. Calcular el radio de la tierra supuesta esférica. A que distancia se encuentra el horizonte.

Solución.

La visual sobre el horizonte es tangente a la línea de tierra. Si se supone que la Tierra es esférica, y teniendo en cuenta que la tangente a una circunferencia en el punto de tangencia es perpendicular al radio, la visual en el horizonte en perpendicular al radio de la Tierra, por lo tanto el triángulo formado por el punto de observación (O), el punto de tangencia en el horizonte (T) y el centro de la tierra (C) es rectángulo en T.



Para poder observarlo con mayor claridad el triángulo, se saca del dibujo y se gira.

La definición de seno de 89° 39' permite plantear una ecuación con una incógnita (R).

$$\operatorname{sen} 89^\circ 39' = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{R}{R+120}$$

$$\operatorname{sen} 89^\circ 39' (R+120) = R \ : \ R \operatorname{sen} 89^\circ 39' + 120 \operatorname{sen} 89^\circ 39' = R \ : \ R - R \operatorname{sen} 89^\circ 39' = 120 \operatorname{sen} 89^\circ 39'$$

$$R\left(1 - \operatorname{sen} 89^\circ 39'\right) = 120 \operatorname{sen} 89^\circ 39' \ : \ R = \frac{120 \operatorname{sen} 89^\circ 39'}{1 - \operatorname{sen} 89^\circ 39'} = 6\,431\,520 \text{ m} = 6431'5 \text{ Km}$$

La distancia al horizonte (L) se calcula con la definición de tangente de 89°39' conocido el radio de la Tierra.

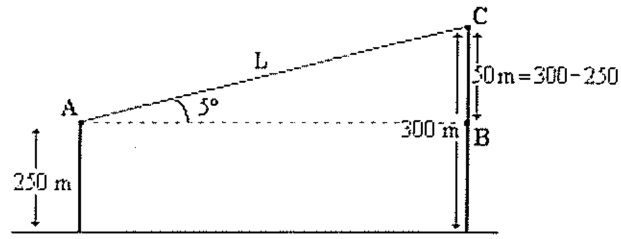
$$\text{tg } 89°\,39' = \frac{R}{L} \quad : \quad L = \frac{R}{\text{tg } 89°\,39'} = \frac{6\,431\,520}{\text{tg } 89°\,39'} = 39\,288 \text{ m} \approx 39'3 \text{ Km}$$

Nota: Para poder ver con mayor claridad el triángulo rectángulo en el dibujo, la altura de observación (120 m) y el radio terrestre (6400 Km) no están a escala.

18. Dos torretas de vigilancia forestal se encuentran situadas respectivamente a 250 y 300 m de altura. Si la visual que une los puntos de observación de ambas torretas forma un ángulo de 5° con la horizontal, cual debe ser el alcance mínimo de las radios que usan los vigilantes para que puedan estar en contacto.

Solución.

Un esquema gráfico del enunciado permite formar un triángulo rectángulo ABC del que se conoce un ángulo y su cateto opuesto (la diferencia de altura de las torretas permita calcular la longitud del lado AC).

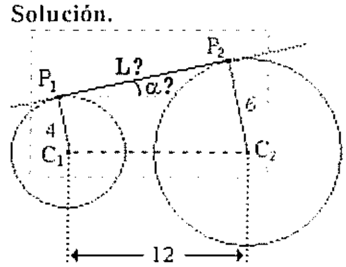


De la definición de seno de 5 se calcula L (mínimo alcance de las radios).

$$\text{sen } 5 = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{50}{L} \quad : \quad L = \frac{50}{\text{sen } 5°} \approx 574 \text{ m}$$

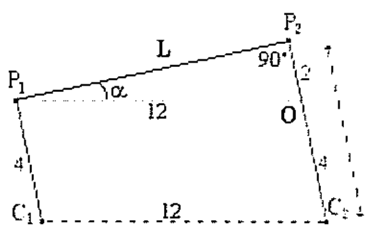
19. Calcular el ángulo que forma la tangente exterior a dos circunferencias, de radios 6 y 4 cm, con la recta que une los centros de ambas, si estos distan 12 cm. Calcular la longitud de dicha tangente.

Solución.

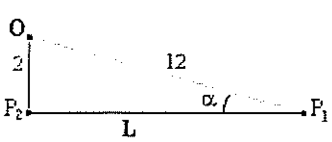


Designamos por P_1 y P_2 a los puntos de tangencia, por L a la longitud de la tangente exterior común (distancia de P_1 a P_2) y por α al ángulo que forma la tangente con la recta que une los centros.

Para entender mejor el problema ampliamos la zona recuadrada, trazando por el punto P_1 una paralela a la recta que une los centros.



Teniendo en cuenta que el radio y la tangente son perpendiculares en el punto de tangencia, el triángulo formado por los puntos OP_2P_1 es rectángulo en P_2. La longitud de la hipotenusa del triángulo (OP_1) es la distancia entre los centros ($OP_1C_1C_2$ forman un paralelogramo), la longitud del cateto OP_2 es la diferencia entre los radios de las circunferencias.



Para ver mejor el triángulo y resolverlo fácilmente es conveniente girarlo por el punto O. Si observamos la figura resultante vemos un triángulo rectángulo del que conocemos la hipotenusa (12) y el cateto opuesto del ángulo buscado (2), mediante la definición de seno se podrá calcular el ángulo α.

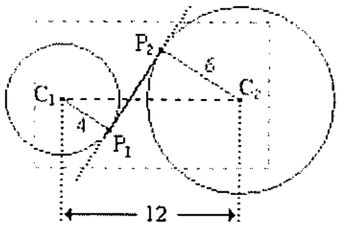
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{2}{12} \quad : \quad \alpha = \text{arcsen} \frac{2}{12} \approx 9'6°$$

La longitud de la tangente se puede obtener mediante la definición de coseno de α.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos 9'6° = \frac{L}{12} \quad : \quad L = 12 \cos 9'6° \approx 11'8 \text{ cm}$$

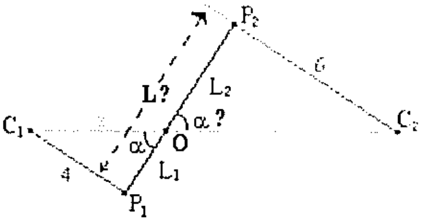
20. Calcular el ángulo que forma la tangente interior a dos circunferencias, de radios 6 y 4 cm, con la recta que une los centros de ambas, si estos distan 12 cm. Calcular la longitud de dicha tangente.



Solución.

Designamos por P_1 y P_2 a los puntos de tangencia, por L a la longitud de la tangente interior común (distancia de P_1 a P_2) y por α al ángulo que forma la tangente con la recta que une los centros.

Para entender mejor el problema ampliamos la zona recuadrada.



Teniendo en cuenta que el radio y la tangente son perpendiculares en el punto de tangencia, los triángulos formados por los puntos C_1P_1O y C_2P_2O son rectángulos en P_1 y P_2 respectivamente, además los ángulos denominados α de ambos triángulo son iguales (dos rectas al cortarse determinan cuatro ángulos iguales dos a dos), por lo tanto los triángulos son semejantes.

Si aplicamos la definición de seno al ángulo α de cada triángulo e igualamos se obtiene una ecuación con dos incógnitas (x, y). Por otro lado la suma de x e y es la distancia entre los centros por lo que obtenemos una segunda ecuación que nos permite plantear un sistema, resolviendo el sistema se obtienen x e y.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\text{Triángulo } C_1P_1O : \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{4}{x} \\ \text{Triángulo } C_2P_2O : \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{6}{y}\end{array}\right\} : \dfrac{4}{x} = \dfrac{6}{y} \\ x + y = 12\end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l}\dfrac{4}{x} = \dfrac{6}{y} \\ x + y = 12\end{array}\right. : \left\{\begin{array}{l}x \approx 4'8 \\ y \approx 7'2\end{array}\right.$$

Conocidas las longitudes x e y, se calculan los datos pedidos en el enunciado.

Sen α. $\text{Triángulo } C_1P_1O : \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{4}{4'8} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen}\dfrac{4}{4'8} \approx 56'4^{\circ}$

Longitud de la tangente: $P_1P_2 = L_1 + L_2$

Las longitudes L_1 y L_2 se obtienen mediante la definición de coseno de α en cada triángulo

$$\cos\alpha = \frac{L_1}{x} \quad : \quad L_1 = 4'8\cos 56'4 \approx 2'7\,\text{cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{L_2}{y} \quad : \quad L_2 = 7'2\cos 56'4 \approx 4\ \text{cm}$$

$$L = 2'7 + 4 = 6'7\ \text{cm}$$

1. Resolver los siguientes triángulos:

i. $b = 57$ $c = 100$ $\hat{A} = 57^\circ$ Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre los dos. Aplicando el teorema del coseno se calcula el lado que falta.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \qquad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}} = \sqrt{57^2 + 100^2 - 2\cdot 57\cdot 100\cos 57} = 83'9$$

Conocidos los tres lados, se calcula uno cualquiera de los ángulos que faltan por el teorema del coseno.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(83'9)^2 + 100^2 - 57^2}{2\cdot 83'9\cdot 100} = 0'82$$

$$\cos\hat{B} = 0'82 \Rightarrow \hat{B} = \arccos 0'82 = 34'7^\circ$$

Conocidos dos ángulos, el tercero se saca como diferencia hasta 180°.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \qquad \hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (100^\circ + 34'7^\circ) = 45'3^\circ$$

ii. $b = 57$ $c = 100$ $\hat{B} = 57^\circ$ Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos. Lo primero es saber si el triángulo tiene solución. Para ello aplicamos el teorema de seno a los datos, y despejamos el seno del ángulo que nos falta.

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \qquad \operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{b}\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{100}{57}\operatorname{sen}57^\circ = 1'47 > 1 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

iii. $a = 7$ $b = 17$ $\hat{B} = 76^\circ$ Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos. Lo primero es saber si el triángulo tiene solución. Para ello aplicamos el teorema de seno a los datos, y despejamos el seno del ángulo que nos falta.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \qquad \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{b}\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{7}{17}\operatorname{sen}76^\circ = 0'40 < 1 \Rightarrow \text{Tiene solución}$$

Como además $\frac{7}{17} < 1$, la solución es única, y el ángulo $\hat{A}$ es agudo.

$$\operatorname{sen}\hat{A} = 0'40 \qquad \hat{A} = \operatorname{arcsen} 0'40 = 23'5^\circ$$

Conocidos dos ángulos, el tercero se calcula como diferencia hasta 180°

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \qquad \hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (23'5^\circ + 76^\circ) = 80'5$$

El lado que falta se calcula por el teorema del seno.

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \qquad c = b\frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = 17\cdot\frac{\operatorname{sen}80'5^\circ}{\operatorname{sen}76^\circ} = 17'3$$

iv. $a = 12$, $b = 15$, $c = 18$. Conocidos los tres lados, los dos primeros ángulos se calculan por el teorema del coseno, y el tercero por la suma de ángulos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\hat{A} \qquad \cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\cdot b\cdot c} = \frac{15^2 + 18^2 - 12^2}{2\cdot 15\cdot 18} = -0'45 \qquad \hat{A} = 116'7^\circ$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\hat{B} \qquad \cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\cdot a\cdot c} = \frac{12^2 + 18^2 - 15^2}{2\cdot 12\cdot 18} = 0'56 \qquad \hat{B} = 55'8^\circ$$

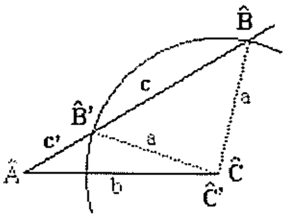
Conocidos dos ángulos, el tercero se calcula como diferencia hasta 180°

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \qquad \hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (116'7^\circ + 55'8^\circ) = 7'5^\circ$$

v. $\hat{A} = 30^\circ$, $a = 15$, $b = 20$. Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos. Lo primero es comprobar si el triángulo tiene solución, para lo cual se aplica el teorema del seno a los datos que nos dan, despejando el seno del ángulo que se desconoce, en este caso $\operatorname{sen}\hat{B}$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \qquad \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{20}{15}\operatorname{sen}30^\circ = 0'67 < 1 \text{ El triángulo tiene solución}$$

Teniendo en cuenta que $\left\{\begin{matrix} \frac{b}{a}\operatorname{sen}\hat{A} < 1 \\ b > a \end{matrix}\right\}$ la solución es doble, es decir el ángulo $\hat{A}$ puede tomar dos valores, uno agudo $(\hat{B})$ y otro obtuso $(\hat{B}')$ que son suplementarios.



$$\operatorname{sen}\hat{B} = 0'67 \Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arcsen} 0'67 = 41'8^\circ$$
$$\hat{B}' = 180 - \hat{B} = 180 - 41'8 = 138'2^\circ$$

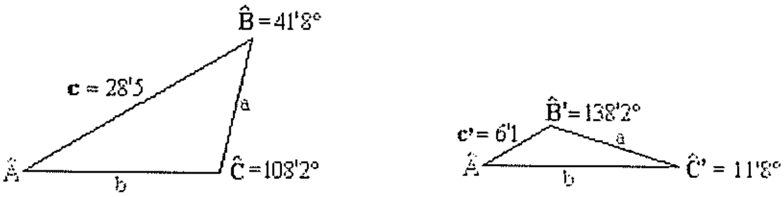
Con $\hat{A}$ y $\hat{B}$ se calcula $\hat{C}$, con $\hat{A}$ y $\hat{B}'$ se calcula $\hat{C}'$.

$$\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180 - (30 + 41'8) = 108'2^\circ$$
$$\hat{C}' = 180 - (\hat{A} + \hat{B}') = 180 - (30 + 138'2) = 11'8^\circ$$

Con $\hat{C}$ se calcula c y con $\hat{C}'$ c' mediante el teorema del seno, aplicando entre a y c.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad \Rightarrow \quad c = a\frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 15\frac{\operatorname{sen} 108'2^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 28'5$$
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c'}{\operatorname{sen}\hat{C}'} \quad \Rightarrow \quad c = a\frac{\operatorname{sen}\hat{C}'}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 15\frac{\operatorname{sen} 11'8^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 6'1$$

Obteniéndose los siguientes triángulos:



vi. $\hat{B} = 95^\circ$, $b = 12$, $c = 10$. Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos.

Como el ángulo conocido es mayor de 90° (obtuso), el triángulo tendrá solución y será única, con la condición de que el lado opuesto al ángulo conocido (b) sea mayor que el lado contiguo (c).

$$b\,(12) > c\,(10)$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \qquad \operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{b}\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{10}{12}\operatorname{sen} 95 = 0'83$$
$$\hat{C} = \operatorname{arcsen} 0'83 = 56'1^\circ$$

Conocido $\hat{C}$ se calcula $\hat{A}$ mediante la suma de ángulos.

$$\hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C}) = 180 - (95 + 56'1) = 28'9^\circ$$

El lado que falta (a) se calcula mediante el teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \qquad a = b\frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = 12\frac{\operatorname{sen} 28'9^\circ}{\operatorname{sen} 95^\circ} = 5'8$$

vii. $b = 80$, $\hat{A} = 15^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$. Conocidos dos ángulos y un lado.

Mediante la suma de ángulos se calcula el ángulo que falta $(\hat{C})$.

$$\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180 - (15 + 30) = 135^\circ$$

Conocidos los tres ángulos y un lado, con el teorema del seno se calculan los lados que faltan.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \qquad a = b\frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = 80\frac{\operatorname{sen} 15^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 41'4$$

$$\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \qquad c = b\frac{\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{B}} = 80\frac{\text{sen}\,135^\circ}{\text{sen}\,30^\circ} = 113'1$$

viii. $a = 40$, $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 75^\circ$. Conocidos dos ángulos y un lado.

El ángulo $\hat{A}$ se calcula como diferencia hasta 180º.

$$\hat{A} = 180 - \left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 180 - (45 + 75) = 60^\circ$$

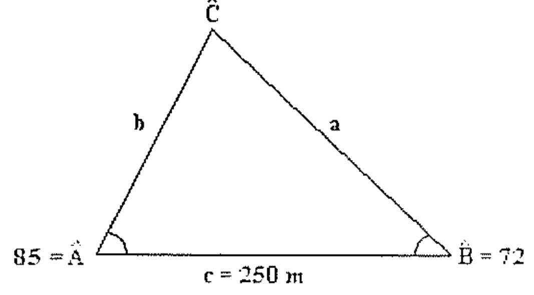
Conocidos los tres ángulo y un lado (a), los restantes lados se calculan con el teorema del seno, utilizando en ambos casos a y $\hat{A}$.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \qquad b = a\frac{\text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{A}} = 40\frac{\text{sen}\,45^\circ}{\text{sen}\,60^\circ} = 32'7$$

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \qquad c = a\frac{\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{A}} = 40\frac{\text{sen}\,75^\circ}{\text{sen}\,60^\circ} = 44'6$$

2. Dos observadores separados 250 m ven un globo estático situado entre ellos bajo ángulos de 72º y 85º. A que altura se encuentra el globo. A que distancia se encuentra cada observador del globo.

Solución.



Lo primero es calcular el ángulo que falta teniendo en cuenta que la suma de todos los ángulos vale 180º

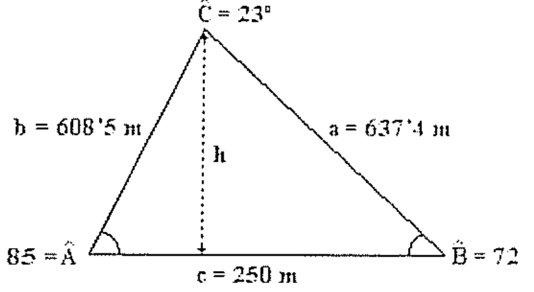
$$\hat{C} = 180 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 180 - (85 + 72) = 23^\circ$$

Conocidos los tres ángulos y un lado los restantes se calculan mediante el teorema del seno.

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \ : \ a = c\cdot\frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\hat{C}} = 250\cdot\frac{\text{sen}85}{\text{sen}23} = 637'4\text{m}$$

$$\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \ : \ b = c\cdot\frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\hat{C}} = 250\cdot\frac{\text{sen}72}{\text{sen}23} = 608'5\text{m}$$

Los observadores se encuentran a 637'4 m y a 608'5 m



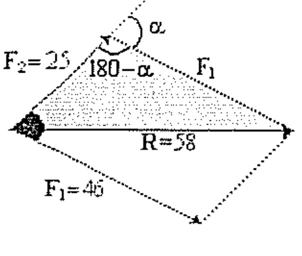
Aplicando la definición de seno al ángulo A se calcula la altura del globo

$$\text{sen}\hat{A} = \frac{h}{b}$$

$$h = b\cdot\text{sen}\hat{A} = 608'5\cdot\text{sen}85 = 606'2\text{m}$$

3. Dos fuerzas de 46 N y 25 N dan una resultante de 58 N. Calcular el ángulo que forman entre sí, y los que forman cada una de ellas con la resultante.

Solución.



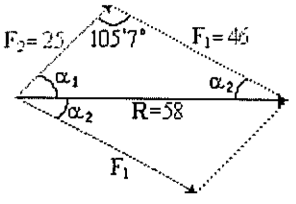
Del triángulo resaltado en la figura se conocen los tres lados, por tanto se pude aplicar el teorema del coseno para calcular cos (180 − α).

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180 - \alpha)$$

$$\cos(180 - \alpha) = \frac{F_1^2 + F_2^2 - R^2}{2F_1F_2} = \frac{46^2 + 25^2 - 58^2}{2\cdot 46\cdot 25} = -0'27$$

$$180 - \alpha = \arccos -0'27 = 105'7^\circ \ \Rightarrow \ \alpha = 180 - 105'7 = 74'3^\circ$$

Para calcular los ángulos que forma cada una de las fuerzas con la resultante (α_1 , α_2) se recurre al triángulo formado por F_1, F_2 y R, del que se conocen las longitudes de los tres lados y un ángulo, como muestra la figura adjunta. Si aplicamos el teorema del coseno al lado F_1, se puede despejar el cos α_1.



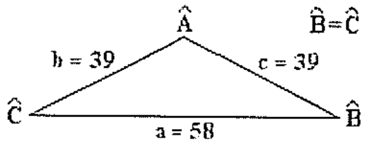
$$F_1^2 = R^2 + F_2^2 - 2RF_2 \cos\alpha_1 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha_1 = \frac{R^2 + F_2^2 - F_1^2}{2RF_2}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{58^2 + 25^2 - 46^2}{2\cdot 58\cdot 25} = 0'646 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1 = 49'8^\circ$$

Conocidos dos ángulos, el tercero se calcula como diferencia hasta 180°

$$\alpha_2 = 180 - (105'7 + 49'8) = 24'5^\circ$$

4. La base de un triángulo isósceles mide 58 cm y los lados iguales 39 cm. Calcular los ángulos.
Solución.



Triángulo isósceles del que se conocen las longitudes de los lados. Aplicando el teorema del coseno se puede calcular $\cos\hat{A}$.

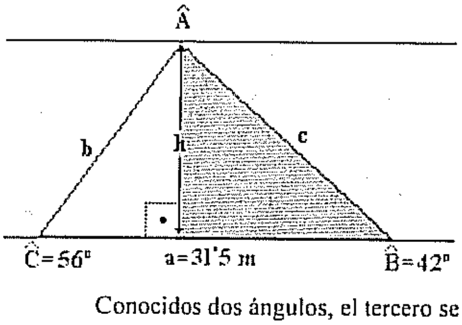
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \qquad \cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{39^2 + 39^2 - 58^2}{2\cdot 39\cdot 39} = -0'1059$$

$$\hat{A} = \text{ar}\cos - 0'1059 \cong 96^\circ$$

Conocido $\hat{A}$ se pueden calcular $\hat{B}$ y $\hat{C}$ teniendo en cuenta que $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180^\circ$, y que el triángulo es isósceles y $\hat{B} = \hat{C}$.

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180^\circ \\ \hat{B} = \hat{C}\end{array}\right\} : \hat{A} + 2\hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = \hat{B} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 96^\circ}{2} = 42^\circ$$

5. Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B de una orilla se observa un punto C de la orilla opuesta. Las visuales forman con la orilla unos ángulos de 42° y 56° respectivamente. Calcular la anchura del río sabiendo que la distancia entre los puntos A y B es de 31,5 m
Solución.



La anchura del río (h) se puede obtener aplicando la definición del sen $\hat{B}$ al triángulo rectángulo resaltado en la figura.

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{h}{c} \qquad \Rightarrow \qquad h = c\cdot\text{sen}\,\hat{B}$$

El lado c se calcula en el triángulo ABC, del que se conocen los ángulos $\hat{B}, \hat{C}$ y el lado a.

Conocidos dos ángulos, el tercero se calcula como diferencia hasta 180°

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180 \qquad \hat{A} = 180 - (\hat{B}+\hat{C}) = 180^\circ - (42+56) = 82^\circ$$

Conocidos los tres ángulos y el lado a, se calcula el lado c mediante el teorema del seno.

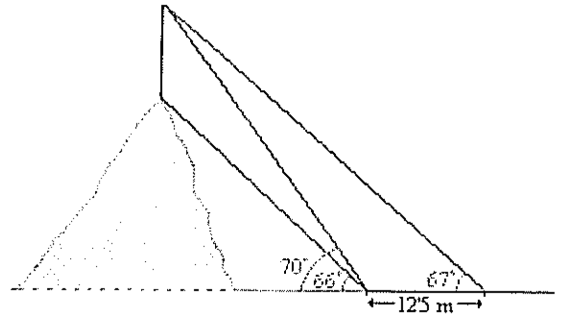
$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \qquad c = a\cdot\frac{\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{A}} = 31'5\cdot\frac{\text{sen}\,56}{\text{sen}\,82} = 26'4\text{ m}$$

Conocido c se calcula la anchura del río.

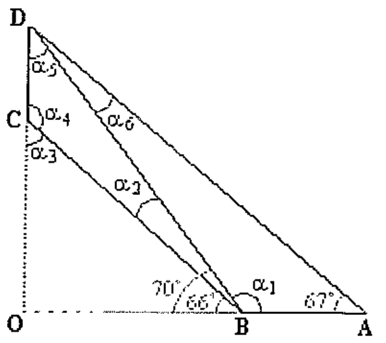
$$h = c\cdot\text{sen}\,\hat{B} = 26'4\cdot\text{sen}\,42 = 17'6\text{ m}$$

6. Calcular la altura de un repetidor de TV ubicado en la cima de una montaña sabiendo que desde un punto alejado del pie de la montaña la base y el vértice del repetidor se ven bajo unos ángulos de 66° y 70° respectivamente. Si nos alejamos de esa posición en línea recta 12,5 m el vértice ahora lo vemos bajo un ángulo de 67°.

Solución.



Con la información del enunciado se pueden obtener una serie de triángulos, rectángulos y oblicuángulos, en los que calcular todos los ángulos únicamente con la condición de que la suma de ángulos es igual a 180°.



- α_1. Es suplementario al ángulo de 70°.

$$\alpha_1 = 180 - 70 = 110^\circ$$

- α_2. Como diferencia de ángulos

$$\alpha_2 = 70 - 66 = 4^\circ$$

- α_3: Complementario al ángulo de 66°.

$$\alpha_3 = 90 - 66 = 24^\circ$$

- α_4. Suplementario a α_3.

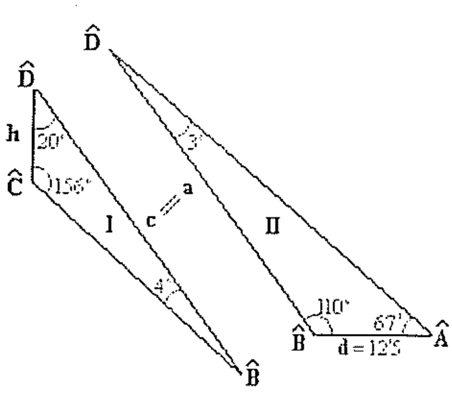
$$\alpha_4 = 180 - 24 = 156^\circ$$

- α_5. En el triángulo BCD: $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180^\circ$

$$\alpha_5 = 180 - (4 + 156) = 20^\circ$$

- α_6. En el triángulo ABD: $67 + \alpha_1 + \alpha_6 = 180^\circ$

$$\alpha_6 = 180 - (67 + 110) = 3^\circ$$



Una vez conocidos todos los ángulos, el problema se resuelve mediante dos triángulos oblicuángulos que comparten un lado como muestra la figura.

En el triángulo I se calcula a mediante el teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{d}{\operatorname{sen}\hat{D}} \qquad a = d \cdot \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{D}}$$

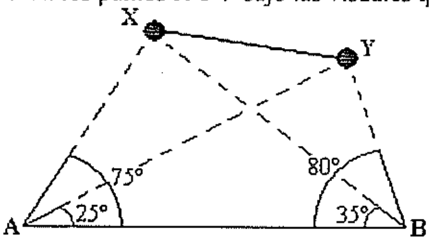
$$a = 12'5 \cdot \frac{\operatorname{sen} 67^\circ}{\operatorname{sen} 3^\circ} \approx 220$$

Teniendo en cuenta que a = c, en el triángulo II se calcula h con el teorema des seno.

$$\frac{h}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \qquad h = c \cdot \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

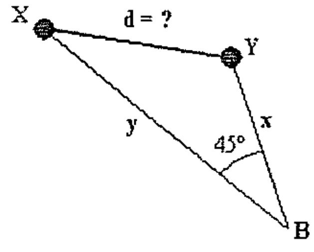
$$h = 220 \cdot \frac{\operatorname{sen} 4^\circ}{\operatorname{sen} 156^\circ} \approx 37'7 \text{ m}$$

7. Calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles (X e Y) si desde dos puntos, A y B que distan 210 m, se observan los puntos X e Y bajo las visuales que muestra la figura.



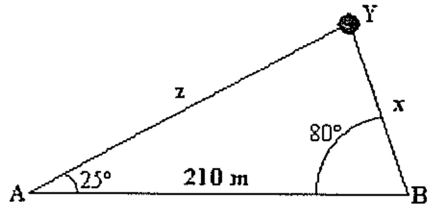
Solución.

Lo primero es seleccionar un triángulo donde este la longitud pedida, uno de ellos puede ser el BXY.



Para calcular **d**, necesitamos conocer **x** e **y**, que localizamos en otros triángulos donde tengamos más datos.

- x se pude calcular en el triángulo ABY aplicando el teorema del seno.

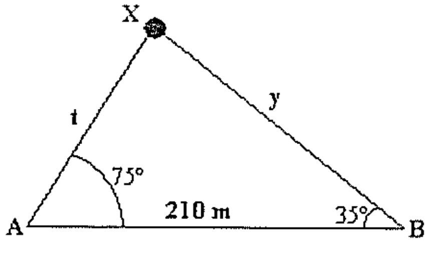


$$25^\circ + 80^\circ + \hat{Y} = 180^\circ \qquad \hat{Y} = 75^\circ$$

$$\frac{x}{\text{sen } 25^\circ} = \frac{210}{\text{sen } 75^\circ} \qquad x = 210\,\frac{\text{sen } 25^\circ}{\text{sen } 75^\circ}$$

$$x \approx 92 \text{ m}$$

- y se puede calcular en el triángulo ABX

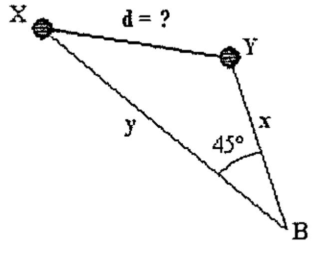


$$75^\circ + 35^\circ + \hat{X} = 180^\circ \qquad \hat{X} = 70^\circ$$

$$\frac{y}{\text{sen } 75^\circ} = \frac{210}{\text{sen } 70^\circ} \qquad x = 210\,\frac{\text{sen } 75^\circ}{\text{sen } 70^\circ}$$

$$x \approx 216 \text{ m}$$

Conocidos $\hat{B}$, x e y se calcula el valor de **d** mediante el teorema del coseno.

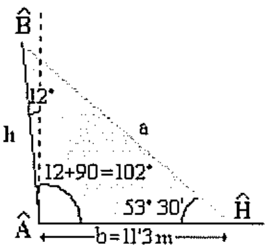


$$d^2 = x^2 + y^2 - 2x \cdot y \cdot \cos \hat{B}$$

$$d = \sqrt{92^2 + 216^2 - 2 \cdot 92 \cdot 216 \cdot \cos 45^\circ} \approx 164 \text{ m}$$

8. Un poste inclinado 12º de la vertical hacia la posición del Sol, proyecta una sombra de 11,32 m cuando la altura del Sol (ángulo al que se encuentra sobre el horizonte) es de 53º30'. Hallar la longitud del poste.

Solución.



Para resolver el problema es conveniente nombrar los ángulos y lados del triángulo. Triángulo oblicuángulo del que se conocen dos ángulos $(\hat{A}, \hat{H})$ y un lado (b).

La forma más rápida de calcular h es mediante el teorema del seno aplicado entre b y h.

$$\frac{h}{\operatorname{sen}\hat{H}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \qquad h = b \cdot \frac{\operatorname{sen}\hat{H}}{\operatorname{sen}\hat{B}}$$

El ángulo $\hat{B}$ se calcula como diferencia de los otros dos hasta 180º.

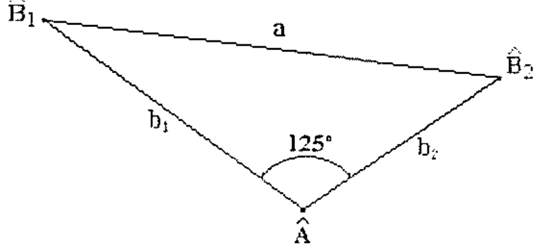
$$\hat{B} = 180 - \left(\hat{A} + \hat{H}\right) = 180 - (102 + 53'5^\circ) = 24'5^\circ$$

$$h = b \cdot \frac{\operatorname{sen}\hat{H}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = 11'3 \cdot \frac{\operatorname{sen} 53'5^\circ}{\operatorname{sen} 24'5} = 21'9 \text{ m}$$

**Nota*: 30' <> 0'5º

9. Dos barcos salen de un puerto con rumbos distintos, formando ángulo de 127º. El primero partió a las 10 h. con velocidad de 17 Km./h. El segundo lo hizo a las 11'30 con velocidad de 26 Km./h. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 Km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde?

Solución.



Triángulo oblicuángulo del que se conocen dos lados en función del tiempo y el ángulo que forman, y se pide la longitud del lado que falta. La solución se obtiene mediante el teorema del coseno.

Las longitudes de los lados conocidos se expresan en función del tiempo que llevan navegando los barcos y de sus velocidades respectivas mediante la ecuación del M.R.U. $s = s_0 + v \cdot t$.

$$\begin{cases} b_1 = v_1 \cdot t_1 \\ b_2 = v_2 \cdot t_2 \end{cases}$$

A las tres de la tarde (15'00), la distancia que separa a cada barco de puerto teniendo en cuenta la hora de partida de cada uno y sus respectivas velocidades es:

$$\begin{cases} b_1 = 17 \,{}^{\text{Km}}\!/_{\text{h}} \cdot (15 - 10)\text{h} = 85 \text{ Km} \\ b_2 = 26 \,{}^{\text{Km}}\!/_{\text{h}} \cdot (15 - 11'5)\text{h} = 91 \text{ Km} \end{cases}$$

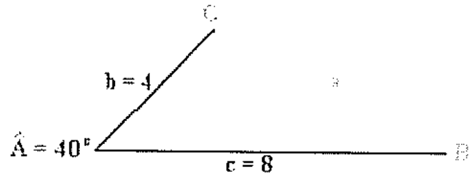
Conocido b_1, b_2, y el ángulo que forman ($\hat{A}$), con el teorema del seno se calcula el lado que falta (a).

$$a = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2 \cos\hat{A}} = \sqrt{85^2 + 91^2 - 2 \cdot 85 \cdot 91 \cdot \cos 125^\circ} = 156 \text{ Km}$$

Como la distancia entre los barcos es mayor que el alcance, no podrán ponerse en contacto.

10. En el triángulo ABC conocemos el ángulo $\hat{A} = 40°$, y los lados b = 4 cm y c = 8 cm. Dibújalo. Traza la altura, la mediana y la bisectriz que parten del vértice C y calcula sus medidas trigonométricamente.

Solución.



Triángulo oblicuángulo del que se conocen la longitud de dos de sus lados (b y c) y el ángulo que forman estos ($\hat{A}$).

Aplicando el teorema del coseno se calcula el lado que falta (a).

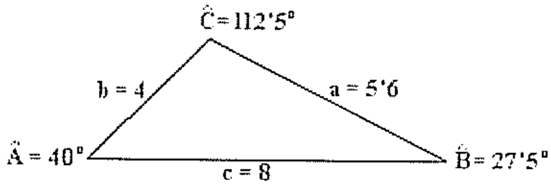
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} : \ a = \sqrt{4^2 + 8^2 - 2\cdot 4\cdot 8\cos 40°} = 5'6$$

Conocidos todos los lados, se calcula el coseno de uno de los ángulos desconocidos a partir del teorema del coseno.

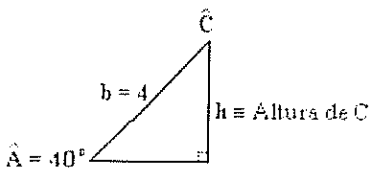
$$\cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5'6^2 + 8^2 - 4^2}{2\cdot 5'6\cdot 8} = 0'89 : \ \hat{B} = \arccos 0'89 = 27'5°$$

El último ángulo se obtiene como diferencia hasta 180°.

$$\hat{C} = 180 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 180 - (40 + 27'5) = 112'5°$$



Altura: Recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

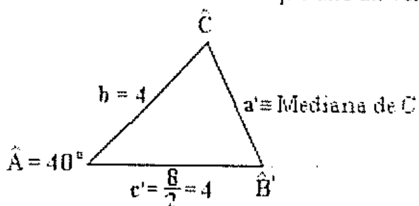


Se calcula por la definición de seno.

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h}{b}$$

$$h = b\cdot\operatorname{sen}\hat{A} = 4\cdot\operatorname{sen} 40° = 2'5$$

Mediana: Recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

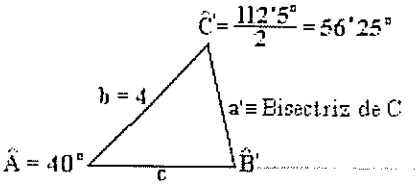


Se calcula por el teorema del coseno.

$$a' = \sqrt{b^2 + c'^2 - 2bc\cos\hat{A}}$$

$$a' = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cos 40} = 2'7$$

Bisectriz: Recta que divide a un ángulo en dos partes iguales.



Por suma de ángulos se calcula $\hat{B}'$

$$\hat{B}' = 180 - \left(\hat{A} + \hat{C}'\right) = 180 - (40 + 56'25) = 83'75°$$

Mediante el teorema del seno se calcula la bisectriz de $\hat{C}$ (a').

$$\frac{a'}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}'} \quad a' = b\frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{B}'} = 4\frac{\operatorname{sen} 40°}{\operatorname{sen} 83'75°} = 2'6$$

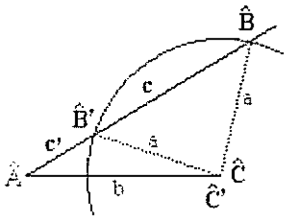
11. En el triángulo ABC conocemos a = 36 cm. b = 42 cm. y A = 34°. Demuestra que hay dos triángulos que verifican las condiciones anteriores. (Puedes verlo haciendo el dibujo a escala). Calcula el área del de mayor superficie.

Solución.

Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos. Lo primero es comprobar si el triángulo tiene solución, para lo cual se aplica el teorema del seno a los datos que nos dan, despejando el seno del ángulo que se desconoce, en este caso sen $\hat{B}$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \qquad \operatorname{sen}\hat{B}=\frac{b}{a}\operatorname{sen}\hat{A}=\frac{42}{36}\operatorname{sen}34^\circ=0'65<1$$ El triángulo tiene solución

Teniendo en cuenta que $\left\{\begin{matrix}\frac{b}{a}\operatorname{sen}\hat{A}<1\\ b>a\end{matrix}\right\}$ la solución es doble, es decir el ángulo $\hat{A}$ puede tomar dos valores, uno agudo $(\hat{B})$ y otro obtuso $(\hat{B}')$ que son suplementarios.



$$\operatorname{sen}\hat{B}=0'65\Rightarrow\hat{B}=\operatorname{arcsen}0'67=40'7^\circ$$
$$\hat{B}'=180-\hat{B}=180-40'7=139'3^\circ$$

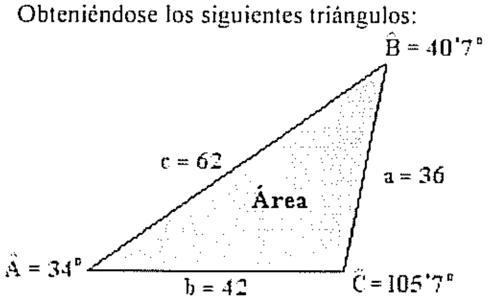
Con $\hat{A}$ y $\hat{B}$ se calcula $\hat{C}$, con $\hat{A}$ y $\hat{B}'$ se calcula $\hat{C}'$.

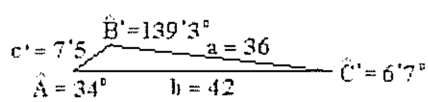
$$\hat{C}=180-(\hat{A}+\hat{B})=180-(34+40'3)=105'7^\circ$$
$$\hat{C}'=180-(\hat{A}+\hat{B}')=180-(34+139'3)=6'7^\circ$$

Con $\hat{C}$ se calcula c y con $\hat{C}'$ c' mediante el teorema del seno, aplicando entre a y c.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad\Rightarrow\quad c=a\frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}}=36\frac{\operatorname{sen}105'7^\circ}{\operatorname{sen}34^\circ}=62$$
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{c'}{\operatorname{sen}\hat{C}'} \quad\Rightarrow\quad c'=a\frac{\operatorname{sen}\hat{C}'}{\operatorname{sen}\hat{A}}=36\frac{\operatorname{sen}6'7^\circ}{\operatorname{sen}34^\circ}=7'5$$

Obteniéndose los siguientes triángulos:

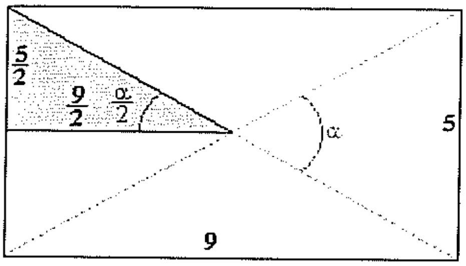




El área del mayor se calcula mediante cualquiera de la tres expresiones posibles.

$$\text{Área}=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\hat{B}=\frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\hat{A}$$
$$\text{Área}=\frac{1}{2}36\cdot42\operatorname{sen}105'7^\circ=727'8\text{ cm}^2$$

12. Una mesa de ping-pong es un rectángulo de 9x5 pies. Calcula el ángulo que forman al cortarse las diagonales de dicho rectángulo.
Solución.

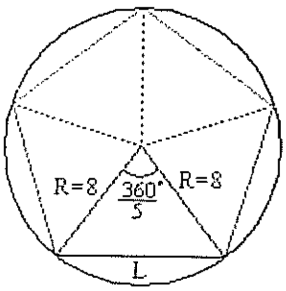


Observando la figura, el ángulo pedido se puede obtener por aplicación de la definición de tangente en el triángulo rectángulo coloreado.

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto opuesto}}=\frac{5/2}{9/2}=\frac{5}{9}$$

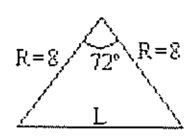
$$\frac{\alpha}{2}=\mathrm{arctg}\,\frac{5}{9}=29^{\circ}\Rightarrow\alpha=2\cdot 29^{\circ}=58^{\circ}$$

13. Calcular la longitud de los lados y el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 8 cm.
Solución.



El pentágono regular se puede descomponer en cinco triángulos isósceles idénticos, de los que se conocerían la longitud de los lados iguales (el radio de la circunferencia) y el ángulo desigual, tal como muestra la figura.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo isósceles, se calcula la longitud del lado del pentágono.



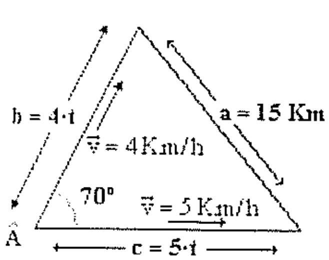
$$L=\sqrt{R^2+R^2-2RR\cos\frac{360^{\circ}}{5}}$$

$$L=\sqrt{8^2+8^2-2\cdot 8\cdot 8\cos 72^{\circ}}=9'4\text{ cm}$$

El área del pentágono se calcula como 5 veces el área del triángulo.

$$A_P=5\cdot A_T=5\cdot\frac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}\,\hat{C}=\begin{Bmatrix}a=b=R\\ \hat{C}=72^{\circ}\end{Bmatrix}=5\cdot\frac{1}{2}R^2\,\mathrm{sen}\,72^{\circ}=5\cdot\frac{1}{2}8^2\,\mathrm{sen}\,72^{\circ}=152'2\text{ cm}^2$$

14. Dos exploradores que caminan por una estepa se separan a las 2 de la tarde. Deciden caminar siempre en línea recta. Sus trayectorias forman un ángulo de 70°, para ello cuentan con brújulas y mapas que les permiten mantener el rumbo. Sus velocidades de marcha son 4 y 5 Km./h respectivamente. Van también provistos de un "Walkie-talkie" que tiene un alcance de 15 Km, esto les permitir estar en conexión un buen rato. ¿Hasta qué hora?.
Solución.



La posición de los dos exploradores transcurrido un tiempo t, y el punto de partida forman un triángulo como el que muestra la figura, del que se puede expresar la longitud de los lados recorridos por estos en función de t, y por tanto en el punto de máximo alcance se debe de cumplir el teorema de coseno.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

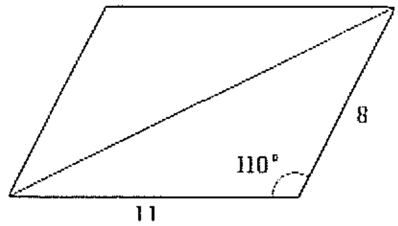
$$15^2=16t^2+25t^2-2\cdot 4t\cdot 5t\cdot\cos 70$$

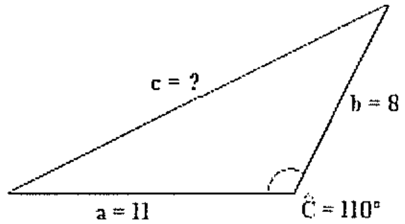
$$225=41t^2-40\cos 70\,t^2 \qquad 225=(41-40\cos 70)\,t^2$$

$$t=\sqrt{\frac{225}{41-40\cos 70}}=2'87\text{ h}=2\text{ h }52'$$

15. En un paralelogramo conocemos la medida de los lados, 8 y 11 m. Los ángulos obtusos miden 110º cada uno. Calcula la medida de la diagonal mayor del paralelogramo y el área. (1 punto)

Solución.



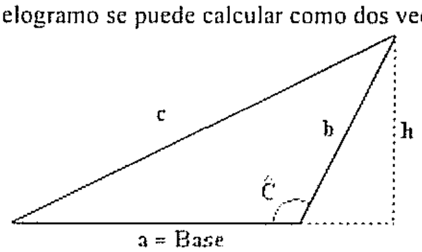


Dividiendo el paralelogramo en dos triángulos por la diagonal mayor se obtienen dos triángulos semejantes, del que se conoce dos lados y el ángulo que forman. El lado que falta (diagonal mayor, c) se obtiene por el teorema del coseno.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \qquad\qquad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}}$$

$$c = 8\sqrt{11^2 + 8^2 - 2\cdot 11\cdot 8\cos 110^\circ} = 15'7$$

El área del paralelogramo se puede calcular como dos veces el área del triángulo.



$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{h}{b}$$

$$h = b\cdot\text{sen}\,\hat{C}$$

$$\text{Área Triángulo} = \frac{1}{2}a\cdot b\cdot \text{sen}\,\hat{C} = \frac{1}{2}11\cdot 8\cdot \text{sen}\,110^\circ = 41'3\ m^2$$

$$\text{Área Paralelogramo} = 2\times \text{Área Triángulo} = 2\cdot 41'3 = 82'6\ m^2$$

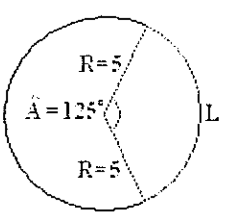
16. En una circunferencia de radio 5 cm. se considera un arco de 125º. Calcular:

a. La longitud de la cuerda, y el área del triángulo que determina la cuerda con los radiovectores.

b. El área del sector circular y el área del segmento circular correspondiente a ese arco.

Solución.

a. Longitud de la cuerda:



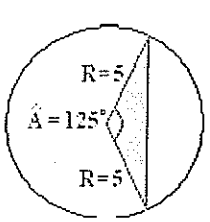
$$L = \alpha R$$

Donde α es el ángulo en radianes

$$\alpha = \frac{125}{180}\pi = \frac{25}{36}\pi\ \text{rad}$$

$$L = \frac{25}{36}\pi\cdot 5 = \frac{25}{36}\pi\ \text{cm}$$

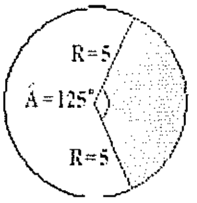
Área del triángulo:



Aplicando la expresión $A = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\hat{C}$, siendo $a = b = R$ y $\hat{C} = 125^\circ$

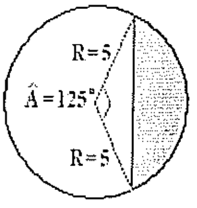
$$A_T = \frac{1}{2}5\cdot 5\,\text{sen}\,125^\circ = 10'2\,\text{cm}^2$$

b. Área del sector circular:



$$A_{S.C.}=\frac{\alpha}{2}R^2=\frac{25\pi/36}{2}\cdot 5^2=27'3\,cm^2$$

Área del segmento circular:
Se obtiene por diferencia entre el área del sector circular y el área del triángulo.



$$A_{SEG.C.}=A_{S.C.}-A_T=27'3-10'2=17'1\,cm^2$$

17. Calcular el área de un triángulo del que se conoce el lado a = 8 m y los ángulos B = 30°, C = 45°. (No utilizar calculadora).

Solución.

El ángulo que falta se calcula por la suma de ángulos.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180$$
$$\hat{A}=180-\left(\hat{B}+\hat{C}\right)=180-(30+45)=105°$$

Los lados que faltan se calculan por el teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}\Rightarrow b=a\frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}}=8\cdot\frac{\operatorname{sen}30°}{\operatorname{sen}105°}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}\Rightarrow c=a\frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}}=8\cdot\frac{\operatorname{sen}45°}{\operatorname{sen}105°}$$

Como no se puede usar calculadora, el sen 105° se calcula como suma de 45° + 60°.

$$\operatorname{sen}105=\operatorname{sen}(45+60)=\operatorname{sen}45\cos60+\cos45\operatorname{sen}60=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Sustituyendo:

$$b=8\cdot\frac{\operatorname{sen}30°}{\operatorname{sen}105°}=8\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}=\frac{16}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

$$c=8\cdot\frac{\operatorname{sen}45°}{\operatorname{sen}105°}=8\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}=\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{16}{1+\sqrt{3}}=8\left(\sqrt{3}-1\right)$$

8. S

1. Realiza las siguientes operaciones con pares numéricos

a) $-5\cdot(3,-2)+3\cdot(2,-1)$
b) $[2\cdot(1,-2)+5\cdot(-3,0)]-\frac{1}{2}\cdot(3,4)+6\cdot(-1,-8)$
c) $2\cdot(3,2)-5\cdot(-1,2)+3\cdot(6,2)-(0,1)$
d) $-3\cdot(x,2y)+3\cdot(2x,y)+2\cdot(0,-1)-3\cdot(3,-2)$

Solución.

a. $$-5\cdot(3,-2)+3\cdot(2,-1)=(-5\cdot 3,-5\cdot(-2))+(3\cdot 2,3\cdot(-1))=(-15,10)+(6,-3)=$$
$$=(-15+6,10+(-3))=(-9,7)$$

b. $$[2\cdot(1,-2)+5\cdot(-3,0)]-\tfrac{1}{2}\cdot(3,4)+6\cdot(-1,-8)=(2,-4)+(-15,0)-\left(\frac{3}{2},2\right)+(-6,-48)=$$
$$=\left(2+(-15)-\frac{3}{2}+(-6),(-4)+0-2+(-48)\right)=\left(-\frac{41}{2},-50\right)$$

c. $$2\cdot(3,2)-5\cdot(-1,2)+3\cdot(6,2)-(0,1)=(6,4)-(-5,10)+(18,6)-(0,1)=$$
$$=(6-(-5)+18-0,\ 4-10+6-1)=(29,-1)$$

d. $$-3\cdot(x,2y)+3\cdot(2x,y)+2\cdot(0,-1)-3\cdot(3,-2)=(-3x,-6y)+(6x,3y)+(0,-2)-(9,-6)=$$
$$=(-3x+6x+0-9,-6y+3y+(-2)-(-9))=(3x-9,-3y+7)$$

2. Hallar x e y para que se cumplan las siguientes igualdades

a) $3\cdot(x,2y)=(-1,5)$
b) $-2\cdot(-1,y)=6\cdot(x,x-y)$

Solución.

a. Por igualdad de pares numéricos:

$3\cdot(x,2y)=(-1,5)$

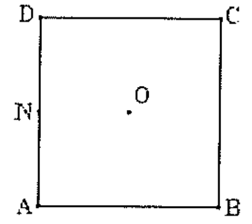
$$(3x,6y)=(-1,5):\begin{cases}3x=-1: x=-\dfrac{1}{3}\\ 6y=5: y=\dfrac{5}{6}\end{cases}$$

b. $-2\cdot(-1,y)=6\cdot(x,x-y)$

$$(2,y)=(6x,6x-6y):\begin{cases}2=6y: y=\dfrac{1}{3}\\ y=6x-6y: x=\dfrac{7}{6}y: x=\dfrac{7}{18}\end{cases}$$

3. Sea ABCD un cuadrado, N el punto medio del lado AD y O el centro del cuadrado. Razonar si las siguientes parejas de vectores tienen el mismo módulo dirección y sentido.

a) $\overline{AN},\overline{BC}$
b) $\overline{AN},\overline{NO}$
c) $\overline{AO},\overline{CA}$
d) $\overline{AN},\overline{ND}$



Solución.

a. $\overline{AN},\overline{BC}$: Igual dirección, igual sentido, diferente módulo $\left(\left|\overline{BC}\right|=2\left|\overline{AN}\right|\right)$

b. $\overline{AN},\overline{NO}$: Distinta dirección, igual modulo.

c. $\overline{AO},\overline{CA}$: Igual dirección, sentido opuesto, diferente módulo $\left(\left|\overline{CA}\right|=2\left|\overline{AO}\right|\right)$

d $\overline{AN},\overline{ND}$: Igual dirección, igual sentido, igual módulo

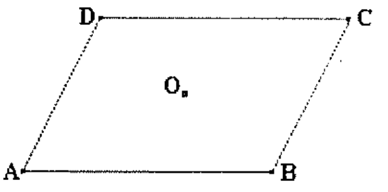
4. Sea ABCD un paralelogramo y O su centro. Razonar si las siguientes parejas de vectores son equipolentes.

a) $\overline{AB} \approx \overline{CD}$

b) $\overline{BA} \approx \overline{CD}$

c) $\overline{AB} \approx \overline{AD}$

d) $\overline{AO} \approx \overline{OC}$



Solución.

Para que dos vectores sean equipolentes deben tener igual módulo dirección y sentido.

a. $\overline{AB} \approx \overline{CD}$: No son equipolentes. Distinto sentido.

b. $\overline{BA} \approx \overline{CD}$: Si son equipolentes.

c. $\overline{AB} \approx \overline{AD}$: No son equipolentes. Distinta dirección.

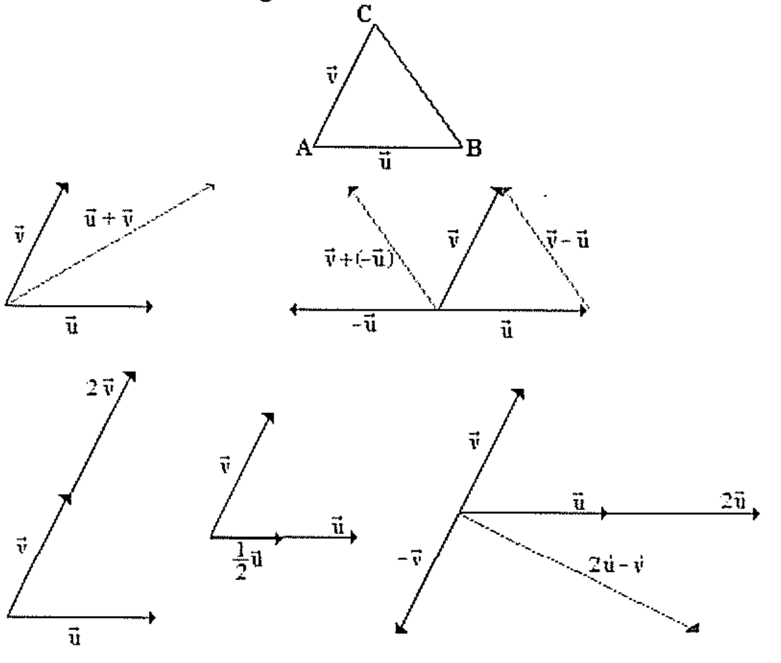
d. $\overline{AO} \approx \overline{OC}$: Si son equipolentes.

5. Sea ABC un triángulo. Si u ={AB} y v ={AC), representar:

a) $\vec{u}+\vec{v}$ b) $\vec{v}-\vec{u}$ c) $2\vec{v}$ d) $\frac{1}{2}\vec{u}$ e) $2\vec{u}-\vec{v}$

Solución.

La solución se obtiene de forma gráfica.



6. Estudiar si los vectores $\overline{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes siendo A(1, 3), B(4, 1), C(−1, 1), D(2, −1).

Solución.

Si dos vectores son equipolentes tienen igual módulo dirección y sentido, en definitiva son IGUALES. La relación de equipolencia es una relación de igualdad.

$$\vec{u} \approx \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$$

$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (4,1)-(1,3) = (4-1, 1-3) = (3,-2)$$
$$\overline{CD} = \vec{d} - \vec{c} = (2,-1)-(-1,1) = (2-(-1), -1-1) = (3,-2)$$

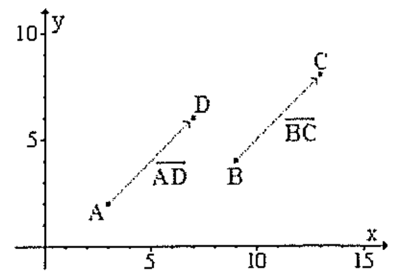
$\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow$ Vectores equipolentes.

7. Demostrar que el cuadrilátero de vértices A(3, 2), B(9, 4), C(13, 8) y D(7, 6) es un paralelogramo.

Solución.

Si cuatro puntos forman un paralelogramo, entre ellos deben de existir parajes de vectores equipolentes (igual módulo dirección y sentido, es decir vectores paralelos de igual módulo y sentido).

Para hacer este ejercicio, y puesto que no nos dan el orden de los puntos, es conveniente representar los puntos en unos ejes coordenados para poder establecer los posibles vectores equipolentes.



Se pueden escoger varias parejas de vectores para comprobar si los cuatro puntos forman un paralelogramo, seleccionamos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

$$\overline{AD} \approx \overline{BC}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AD} = \bar{d} - \bar{a} = (7,6) - (3,2) = (7-3, 6-2) = (4,4)\\ \overline{BC} = \bar{c} - \bar{b} = (13,8) - (9,4) = (13-9, 8-4) = (4,4)\end{array}\right\} : \overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \text{Equipolentes}$$

Forman un paralelogramo

8. Calcular A para que los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sean equipolentes siendo $B(2,-1)$, $C(-3,2)$ y $D(-5,-3)$.

Solución.

Sí $\overline{AB} \approx \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$. Supongamos que el punto a tiene por coordenadas (a_1, a_2)

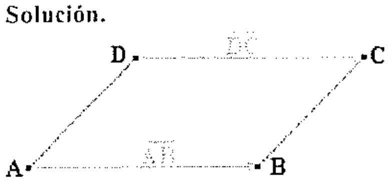
$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = (2 - a_1, -1 - a_2)\\ \overline{CD} = \bar{d} - \bar{c} = (-5-(-3), -3-2) = (-2,-5)\end{array}\right\} : (2 - a_1, -1 - a_2) = (-2,-5)$$

Igualando por componentes, se despejan las coordenadas de A.

$$\begin{cases} 1^a: 2 - a_1 = -2 : a_1 = 4 \\ 2^a: -1 - a_2 = -5 : a_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow A = (4,4)$$

9. Sean A(1, 2), B(2, 3), C(0, 4). Determina D para que ABCD sea un paralelogramo. Halla la longitud de BC

Solución.



Si cuatro puntos forman un paralelogramo es porque entre ellos se pueden establecer parejas de vectores equipolentes. Para resolver el problema debemos mantener el orden de los puntos dentro del paralelogramo (ABCD).

Observando la figura se puede establecer que los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son equipolentes, es decir, iguales ($\overline{AB} = \overline{DC}$). Si suponemos que el punto D tiene por coordenadas (d_1, d_2):

$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = (2-1, 3-2) = (1,1)\\ \overline{DC} = \bar{c} - \bar{d} = (0 - d_1, 4 - d_2) = (-d_1, 4 - d_2)\end{array}\right\} : (1,1) = (-d_1, 4 - d_2)$$

Igualando por componentes, se despejan las coordenadas de A.

$$\begin{cases} 1^a: 1 = -d_1 : d_1 = -1 \\ 2^a: 1 = 4 - d_2 : d_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow A = (-1,3)$$

10. Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores

a) $\{(4, 12), (2, 6)\}$

b) $\{(1, 2), (3, 4)\}$

c) $\{(1, 0), (0, 1)\}$

d) $\{(1, 3), (5, 4), (-3, 7)\}$

Solución.

Un conjunto de n vectores es linealmente dependiente si existe n números, no todos nulos, que permiten plantear una combinación lineal entre ellos cuyo resultado sea el vector nulos. En el caso de vectores de R^2, el máximo número de vectores linealmente independientes es dos, y dos vectores serán linealmente dependientes si son proporcionales.

Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente dependientes se cumplirá:

$$\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}=0 \qquad \alpha\bar{u}=-\beta\bar{v} \qquad \bar{u}=\frac{-\beta}{\alpha}\bar{v} \qquad \bar{u}=K\bar{v}$$

$$(u_1,u_2)=K(v_1,v_2)\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}u_1=Kv_1\\u_2=Kv_2\end{Bmatrix}:K=\frac{u_1}{v_1}=\frac{v_2}{u_2}$$

a. $\{(4,12),(2,6)\}$: $\frac{4}{2}=\frac{12}{6}\Rightarrow$ Linealmente dependientes.

b. $\{(1,2),(3,4)\}$: $\frac{1}{3}\neq\frac{2}{4}\Rightarrow$ Linealmente independientes.

c. $\{(1,0),(0,1)\}$: $\frac{1}{0}\neq\frac{0}{1}\Rightarrow$ Linealmente independientes. Base canónica $\{\vec{i},\vec{j}\}$.

d. $\{(1,3),(5,4),(-3,7)\}$: $\Rightarrow$ Por ser más de dos, linealmente dependientes.

11. ¿Son $\bar{v}=(1,2)$ y $\bar{w}=(-3,1)$ linealmente dependientes?

Solución.

Para que dos vectores sean linealmente dependientes debe existir una combinación lineal no trivial entre ellos que sea cero.

$$\alpha_1\bar{v}+\alpha_2\bar{w}=0$$

Operando con la expresión se demuestra que para que dos vectores sean dependientes, deben ser proporcionales.

$$\alpha_1\bar{v}=-\alpha_2\bar{w} \ : \ \bar{v}=\frac{-\alpha_2}{\alpha_1}\bar{w}$$

α_1y α_2 son constantes y su cociente también lo es, por tanto

$$\bar{v}=K\cdot\bar{w}$$

$$\bar{v}(v_1,v_2)=K\cdot\bar{w}(u_1,u_2):\begin{Bmatrix}v_1=K\cdot w_1:K=\dfrac{v_1}{w_1}\\ v_2=K\cdot w_2:K=\dfrac{v_2}{w_2}\end{Bmatrix}\Rightarrow\frac{v_1}{w_1}=\frac{v_2}{w_2}$$

$\frac{1}{-3}\neq\frac{2}{1}\Rightarrow$ Vectores son linealmente independientes. Forma una base.

12. Determinar para que valor de λ el vector $(3\lambda, 2)$ es linealmente dependiente del vector $(2,4)$

Solución.

Para que dos vectores sean linealmente dependientes deben ser proporcionales.

$$(3\lambda,2)=k\cdot(2,4)$$

Igualando por componentes

$$\begin{cases}1^a: 3\lambda=2k\\2^a: 2=4k\end{cases}$$

De las segundas componentes se obtiene el valor de k, que sustituido en las primeras componentes permite calcular λ.

$$k=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \ : \ 3\lambda=2\frac{1}{2} \ : \ \lambda=\frac{1}{3}$$

13. Probar que B = { $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ } es una base del plano vectorial, siendo $\bar{u}_1 = (4, 0)$ y $\bar{u}_2 = (5, 1)$.

Solución.

Para que un subconjunto de vectores sea base de un conjunto de vectores debe cumplir dos condiciones:

i. Debe ser un sistema generador, es decir, los vectores que forman la base, deben ser capaces de generar cualquier vector del conjunto mediante combinación lineal

ii. Los vectores que forman la base deben ser linealmente independientes.

i. Para demostrar que un subconjunto de vectores { $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ } es un sistema generador de un espacio vectorial (V^2) hay que expresar los coeficientes de la combinación lineal (α_1, α_2) en función de las componentes de un vector genérico $(\bar{v}(x, y))$ del espacio vectorial (V^2).

$$\bar{v} = \alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2$$

$$(x, y) = \alpha_1(4, 0) + \alpha_2(5, 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 4\alpha_1 + 5\alpha_2 \\ y = \alpha_2 \end{cases}$$

Hay que despejar α_1 y α_2 en función de x e y

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 5\alpha_2 = x \\ \alpha_2 = y \end{cases} : \; 4\alpha_1 + 5y = x \; : \; \alpha_1 = \frac{x - 5y}{4}$$

{ $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ } es un sistema generador de V^2, cualquier vector (x, y) de V^2 se puede expresar como combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$, siendo los coeficientes de la combinación lineal:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{x - 5y}{4} \\ \alpha_2 = y \end{cases}$$

ii. Por tratarse de vectores de V^2, si no son proporcionales, serán linealmente independientes.

$\bar{u}_1(4, 0) \neq k \cdot \bar{u}_2(5, 1) \Rightarrow$ Linealmente independientes.

$\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ forman una base de V^2.

14. Probar que B = { $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ } es una base del plano vectorial, siendo $\bar{v}_1 = (-1, 2)$ y $\bar{v}_2 = (2, 1)$. En caso afirmativo, expresar $\bar{a}$ (3, −1) en función de la base.

Solución.

Para que un subconjunto de dos vectores sea una base de V^2, debe cumplir dos condiciones:

1ª Deben formar un sistema generador de V^2. ∀ (x, y) ∈ V^2, deben existir dos números reales α_1 y α_2 que permiten expresarlo como combinación lineal de los vectores que forman el sistema generador.

$$(x, y) = \alpha_1\cdot(-1, 2) + \alpha_2\cdot(2, 1)$$

Igualando por componentes, hay que despejar α_1 y α_2 en función de x e y.

$$\begin{cases} x = -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ y = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

Resolviendo por sustitución: Despejando de la primera ecuación α_1 y sustituyendo en la 2ª, se obtiene α_2

$$\alpha_1 = -x + 2\alpha_2$$

$$y = 2\cdot(-x + 2\alpha_2) + \alpha_2 : \; \alpha_2 = \frac{2x + y}{5}$$

Conocido α_2 se calcula α_1.

$$\alpha_1 = -x + 2\frac{2x + y}{5} = \frac{-x + 2y}{5}$$

Cualquier vector (x, y) de V^2 puede ser generado mediante combinación lineal por los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, siendo los coeficientes de la combinación:

$$\alpha_1=\frac{-x+2y}{5}\qquad \alpha_2=\frac{2x+y}{5}$$

2º Los vectores deben ser linealmente independientes. En V^2, si dos vectores no son proporcionales, son linealmente independientes.

$$\bar{v}_1(1,2)\neq k\cdot\bar{v}_2(2,1)$$

$\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ forman una base de V^2.

Para expresar $\bar{a}\,(3,-1)$ en función de la base, bastará con sustituir las componentes de $\bar{a}$ en las expresiones de α_1 y α_2.

$$\alpha_1=\frac{-3+2\cdot(-1)}{5}=-1\qquad \alpha_2=\frac{2\cdot 3+(-1)}{5}=1$$

$$\bar{a}=-1\cdot\bar{v}_1+1\cdot\bar{v}_2$$

15. ¿Son linealmente dependiente los vectores $\bar{u}_1=(1,5)$, $\bar{u}_2=(2,3)$ y $\bar{u}_3=(1,-2)$? En caso afirmativo escribir $\bar{u}_2$ como combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_3$.

Solución.

En el conjunto de vectores del plano (V^2), el máximo número de vectores linealmente independientes es dos, por lo tanto, tres vectores serán linealmente dependientes.

En un conjunto de vectores linealmente dependientes, uno de ellos, puede expresarse como combinación lineal de los demás, con la única condición de que su coeficiente en la combinación lineal no sea cero.

$$\bar{u}_2=x\cdot\bar{u}_1+y\cdot\bar{u}_2$$

Sustituyendo por sus componentes e igualando, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$(2,3)=x\cdot(1,5)+y\cdot(1,-2)$$

$$\begin{cases}1^a: 2=x+y\\ 2^a: 3=5x-2y\end{cases}:\text{Resolviendo}\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$

$$\bar{u}_2=\bar{u}_1+\bar{u}_2$$

16. Expresar $\bar{c}=(-1,8)$ como combinación lineal de $\bar{v}=(1,2)$ y $\bar{w}=(-3,1)$.

Solución.

$$\bar{c}=\alpha\cdot\bar{v}+\beta\cdot\bar{w}$$

$$(1,-8)=\alpha\cdot(1,2)+\beta(-3,1):\begin{cases}1^a\text{ Componente}: 1=\alpha-3\beta\\ 2^a\text{ Componente}: -8=2\alpha+\beta\end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtienen los coeficientes de la combinación lineal.

$$\alpha=-\frac{23}{7}\qquad \beta=-\frac{10}{7}$$

El vector $\bar{c}$ se puede expresar como.

$$\bar{c}=-\frac{23}{7}\bar{v}-\frac{10}{7}\bar{w}\quad \text{ó}\quad 23\bar{v}+10\bar{w}+7\bar{c}=0$$

17. Comprobar que los vectores (1, 3) y (2, −1) forman una base de V_2. Hallar las coordenadas del vector (1, 10) en dicha base.

Solución.

En el plano (R^2) el máximo número de vectores linealmente independientes es dos, por lo tanto, tres vectores serán linealmente dependientes.

$$(1,10)=\alpha(1,3)+\beta(2,-1)=(\alpha+2\beta,3\alpha-\beta)$$

Igualando por componentes

$$(1,10)=(\alpha+2\beta,3\alpha-\beta):\begin{cases}1=\alpha+2\beta\\10=3\alpha-\beta\end{cases}$$

Resolviendo el sistema se calculan los valores de α y β.

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=1\\3\alpha-\beta=10\end{cases}\xrightarrow{\beta=3\alpha-10}\alpha+2(3\alpha-10)=1\Rightarrow 7\alpha=21\Rightarrow\alpha=3:\beta=3\cdot3-10=-1$$

$$(1,10)=3\cdot(1,3)-(2,-1)$$

18. Sea A(1,1), B(3,4). Determina un punto M' para que $\overline{AM'}=\frac{2}{3}\overline{BA}$.

Solución.

Si M' = (x', y')

$$\overline{AM'}=\bar{m}'-\bar{a}=(x'-1,y'-1)$$
$$\overline{BA}=\bar{a}-\bar{b}=(1-3,1-4)=(-2,-3)$$

Sustituyendo en la igualdad

$$\overline{AM'}=\frac{2}{3}\overline{BA}\Rightarrow(x'-1,y'-1)=\frac{2}{3}\cdot(-2,-3)$$

igualando por componentes

$$\overline{AM'}=\frac{2}{3}\overline{BA}\Rightarrow(x'-1,y'-1)=\frac{2}{3}\cdot(-2,-3)\begin{cases}x'-1=\frac{2}{3}\cdot(-2):x'=-\frac{1}{3}\\y'-1=\frac{2}{3}\cdot(-3):y'=-1\end{cases}\Rightarrow M'=\left(-\frac{1}{3},-1\right)$$

19. Mediante el cálculo vectorial hallar el punto medio del segmento $\overline{AB}$, siendo A(3,–2) y B(–2,5).

Solución.

Si M es el punto medio de $\overline{AB}$, se debe cumplir la siguiente relación simple:

$$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}$$

Para establecer la relación simple hay que fijarse también en los sentidos de las vectores.

Si m_1 y m_2 son las coordenadas del punto M:

$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB}=\bar{b}-\bar{a}=(-2-(-3),5-(-2))=(1,7)\\\overline{AM}=\bar{m}-\bar{a}=(m_1-3,m_2-(-2))=(m_1-3,m_2+5)\end{array}\right\}:(1,7)=2\cdot(m_1-3,m_2+5)$$

Igualando por componentes de despejan las coordenadas de M.

$$\left.\begin{array}{r}1^a:1=m_1-3:m_1=4\\2^a:7=m_2+5:m_2=2\end{array}\right\}:M=(4,2)$$

20. Hallar las coordenadas de un punto N tal que $\overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{NB}$, siendo A(1,4) y B(3,5)

Solución.

Sean n_1 y n_2 las coordenadas del punto N.

$$\overrightarrow{AN}=\bar{n}-\bar{a}=(n_1-1,n_2-4)\qquad\overrightarrow{NB}=\bar{b}-\bar{n}=(3-n_1,5-n_2)$$

Sustituyendo en la igualdad:

$$(n_1-1,n_2-4)=\frac{1}{2}(3-n_1,5-n_2)\qquad 2\cdot(n_1-1,n_2-4)=(3-n_1,5-n_2)$$

Igualando por componentes:

$$\left.\begin{array}{l} 1^a: 2\cdot(n_1-1)=3-n_1 : 3n_1=5 : n_1=5/3 \\ 2^a: 2\cdot(n_2-4)=5-n_2 : 3n_2=13 : n_2=13/3 \end{array}\right\} : N=\left(\frac{5}{3},\frac{13}{3}\right)$$

21. Sea $\bar{a}$ el vector de componentes $(-1,2)$, sabiendo que tiene por extremo el punto $Q(-1,-2)$, calcular las coordenadas del origen del vector. Cual es el módulo del vector $\bar{a}$. Si $\bar{b}=(1/2,-1)$ hallar x para que el vector $\bar{a}=x\cdot\bar{b}$

Solución.

Sea $\overrightarrow{PQ}$ un representante del vector $\bar{a}$, nos piden calcular las coordenadas de P.

$$\bar{a}=\overrightarrow{PQ}=\bar{q}-\bar{p}$$
$$(-1,2)=(-1,-2)-(p_1,p_2)$$

Igualando por componentes:

$$\left.\begin{array}{l} 1^a: -1=-1-p_1 : p_1=0 \\ 2^a: 2=-2-p_2 : p_2=-4 \end{array}\right\} : P=(0,-4)$$

Módulo de $\bar{a}$:

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

Para que se cumpla la igualdad $\bar{a}=x\cdot\bar{b}$, se debe cumplir por componentes:

$$(-1,2)=x\cdot\left(1/2,-1\right):\left\{\begin{array}{l} 1^a: -1=x\cdot\frac{1}{2} \\ 2^a: 2=x\cdot(-1) \end{array}\right. \Rightarrow x=-2$$

22. Mediante el cálculo vectorial comprobar si están alineados los puntos $A(-1,3)$ $B(3,5)$ y $C(1,6)$.

Solución.

Para que tres puntos estén alineados, los vectores que se forman entre ellos deben ser proporcionales.

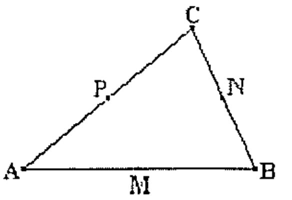
$$\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AB}=\bar{b}-\bar{a}=(3-(-1),5-3)=(4,2)$$
$$\overrightarrow{AC}=\bar{c}-\bar{a}=(1-(-1),6-3)=(2,3)$$

$$(4,2)=k\cdot(2,3):\left\{\begin{array}{l} 1^a: 4=2k : k=2 \\ 2^a: 2=3k : k=2/3 \end{array}\right.$$

No existe ningún valor de k que verifique las dos igualdades. Los puntos no están alineados

23. Calcular las coordenadas de los vértices de un triángulo, sabiendo que los puntos medios de sus lados son M(1, 4) N(−1, 2) y P(−4, 1).

Solución.



Aplicando la definición de punto medio se obtienen dos sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, un sistema por componente.

$$\text{M punto medio de } \overline{AB} \Rightarrow M(1,2)=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right):\begin{cases}\dfrac{a_1+b_1}{2}=1\\ \dfrac{a_2+b_2}{2}=2\end{cases}:\begin{cases}a_1+b_1=2\\ a_2+b_2=4\end{cases}$$

$$\text{N punto medio de } \overline{BC} \Rightarrow N(-1,2)=\left(\frac{b_1+c_1}{2},\frac{b_2+c_2}{2}\right):\begin{cases}\dfrac{b_1+c_1}{2}=-1\\ \dfrac{b_2+c_2}{2}=2\end{cases}:\begin{cases}b_1+c_1=-2\\ b_2+c_2=4\end{cases}$$

$$\text{P punto medio de } \overline{AC} \Rightarrow P(-4,1)=\left(\frac{a_1+c_1}{2},\frac{a_2+c_2}{2}\right):\begin{cases}\dfrac{a_1+c_1}{2}=-4\\ \dfrac{a_2+c_2}{2}=1\end{cases}:\begin{cases}a_1+c_1=-8\\ a_2+c_2=2\end{cases}$$

Con las primera componentes se obtiene un sistema y con las segundas otro.

$$\begin{cases}a_1+b_1=2\\ b_1+c_1=-2\\ a_1+c_1=-8\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}a_2+b_2=4\\ b_2+c_2=4\\ a_2+c_2=2\end{cases}$$

Para la resolución del sistema recomiendo el método de Gauss.

$$\begin{cases}a_1+b_1=2\\ b_1+c_1=-2\\ a_1+c_1=-8\end{cases}:\text{Matriz asociada}:\begin{pmatrix}1&1&0&\vdots&2\\0&1&1&\vdots&-2\\1&0&1&\vdots&-8\end{pmatrix}=\{E_3=E_3-E_1\}=\begin{pmatrix}1&1&0&\vdots&2\\0&1&1&\vdots&-2\\0&-1&1&\vdots&-10\end{pmatrix}=$$

$$=\{E_3=E_3+E_2\}=\begin{pmatrix}1&1&0&\vdots&2\\0&1&1&\vdots&-2\\0&0&2&\vdots&-12\end{pmatrix}:\begin{cases}a_1+b_1=2\\ b_1+c_1=-2:c_1=-6:\begin{cases}a_1+b_1=2\\ b_1-6=-2\end{cases}:b_1=4\\ 2c_1=-12\end{cases}$$

$$\{a_1+4=2:a_1=-2$$

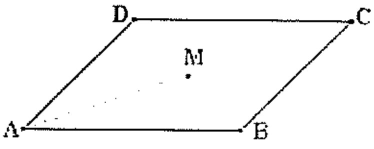
$$\begin{cases}a_2+b_2=4\\ b_2+c_2=4\\ a_2+c_2=2\end{cases}:\text{Matriz asociada}:\begin{pmatrix}1&1&0&\vdots&4\\0&1&1&\vdots&4\\1&0&1&\vdots&2\end{pmatrix}=\{E_3=E_3-E_1\}=\begin{pmatrix}1&1&0&\vdots&4\\0&1&1&\vdots&4\\0&-1&1&\vdots&-2\end{pmatrix}=$$

$$=\{E_3=E_3+E_2\}=\begin{pmatrix}1&1&0&\vdots&4\\0&1&1&\vdots&4\\0&0&2&\vdots&2\end{pmatrix}:\begin{cases}a_2+b_2=4\\ b_2+c_2=4:c_2=1:\begin{cases}a_2+b_2=4\\ b_2+1=4\end{cases}:b_2=3\\ 2c_2=2\end{cases}$$

$$a_2+3=4:a_2=1$$

Solución: A = (−2, 1): B = (4, 3); C = (−6, 1)

24. De un paralelogramo se conocen los vértices consecutivos A(−9,−5), B(−7,−6). Calcular las coordenadas de los puntos C y D, si el centro del paralelogramo es M(−5,−1).
Solución.



Conocidas las coordenadas de A, B y M y aplicando la definición de punto medio a los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se calculan las coordenadas de C y D.

$$\text{M punto medio de } \overline{AC} \Rightarrow M(m_1, m_2) = \left(\frac{a_1+c_1}{2}, \frac{a_2+c_2}{2}\right) : \begin{cases} m_1 = \dfrac{a_1+c_1}{2} \\ m_2 = \dfrac{a_2+c_2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2m_1 - a_1 \\ c_2 = 2m_2 - a_2 \end{cases} : \begin{cases} c_1 = 2\cdot(-5)-(-9) = -1 \\ c_2 = 2\cdot(-1)-(-5) = 3 \end{cases} \Rightarrow C = (-1, 3)$$

$$\text{M punto medio de } \overline{BD} \Rightarrow M(m_1, m_2) = \left(\frac{b_1+d_1}{2}, \frac{b_2+d_2}{2}\right) : \begin{cases} m_1 = \dfrac{b_1+d_1}{2} \\ m_2 = \dfrac{b_2+d_2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 2m_1 - b_1 \\ d_2 = 2m_2 - b_2 \end{cases} : \begin{cases} d_1 = 2\cdot(-5)-(-7) = -3 \\ d_2 = 2\cdot(-1)-(-6) = 4 \end{cases} \Rightarrow D = (-7, 4)$$

25. Hallar b para que los puntos A(−2,5), B(3,0) y C(b,7) estén alineados, para el valor de b calculado, estudiar la posición relativa de los puntos.
Solución.
Si tres puntos están alineados, los vectores formados entre ellos deben ser proporcionales.

$$\overline{AB} = K \cdot \overline{AC}$$

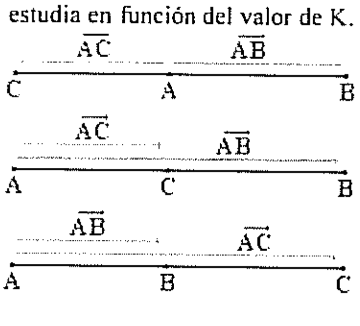
$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (3-(-2), 0-5) = (5, -5) \\ \overline{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (b-(-2), 7-5) = (b+4, 2) \end{array}\right\} : (5, -5) = K \cdot (b+4, 2) : \begin{cases} 5 = K\cdot(b+4) \\ -5 = K\cdot 2 \end{cases}$$

De la segunda componente se despeja K, con este valor en la primera componente se despeja b.

$$K = -\frac{5}{2}$$

$$5 = -\frac{5}{2}(b+4) : b = -6$$

Posición relativa. Con los vectores con origen común $\left(\overrightarrow{AB} = K \cdot \overrightarrow{AC}\right)$, la posición relativa se estudia en función del valor de K.



- Si K < 0, los vectores tienen distinto sentido, el origen de ambos (A) esta entre los otros dos puntos (B y C)
- Si K > 1, $\overrightarrow{AB}$ es de mayor longitud que $\overrightarrow{AC}$, C está entre A y B.
- Si 0 < K < 1, $\overrightarrow{AC}$ es de mayor longitud que $\overrightarrow{AB}$, B está entre A y C.

En este caso K < 0, A está entre B y C

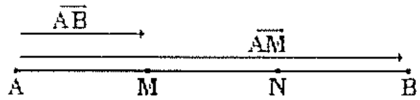
26. Calcular las coordenadas de los puntos que dividen al segmento $\overrightarrow{PQ}$ en tres partes iguales, siendo A(1,3) y B(2,8).

Solución.

Para calcular M y N se establecen relaciones simples en las que habrá que tener en cuenta las longitudes y los sentidos de los vectores.

- Calculo de M: $\overline{AB} = 3 \cdot \overline{AM}$

$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = 3(m_1 - a_1, m_2 - a_2)$



Igualando por componentes:

$$\left\{\begin{array}{l} 1^a: b_1 - a_1 = 3\cdot(m_1 - a_1): m_1 = \dfrac{2a_1 + b_1}{3} = \dfrac{2\cdot 1 + 2}{3} = \dfrac{4}{3} \\ 2^a: b_2 - a_2 = 3(m_2 - a_2): m_2 = \dfrac{2a_2 + b_2}{3} = \dfrac{2\cdot 3 + 8}{3} = \dfrac{14}{3} \end{array}\right. : M = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{14}{3}\right)$$

- Calculo de N: $\overline{AB} = 3 \cdot \overline{NB}$

$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = 3(b_1 - n_1, b_2 - n_2)$

Igualando por componentes:

$$\left\{\begin{array}{l} 1^a: b_1 - a_1 = 3\cdot(b_1 - n_1): n_1 = \dfrac{a_1 + 2b_1}{3} = \dfrac{1 + 2\cdot 2}{3} = \dfrac{5}{3} \\ 2^a: b_2 - a_2 = 3(b_2 - n_2): n_2 = \dfrac{a_2 + 2b_2}{3} = \dfrac{3 + 2\cdot 8}{3} = \dfrac{19}{3} \end{array}\right. : N = \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{19}{3}\right)$$

1. Hallar el producto escalar de los vectores $\bar{a} = (-6,4)$ y $\bar{b} = (4,5)$.

Solución.

Por estar definidos en la base canónica:

$$\bar{a} \circ \bar{b} = (-6,4) \circ (4,5) = (-6) \cdot 4 + 4 \cdot 5 = -4$$

El producto escalar de dos vectores puede ser negativo. La información que se obtiene del signo del producto escalar es:

$$\bar{a} \circ \bar{b} > 0 \Rightarrow \text{El ángulo entre los vectores es agudo}$$
$$\bar{a} \circ \bar{b} < 0 \Rightarrow \text{El ángulo entre los vectores es obtuso}$$

2. Halla $\bar{a} \circ \bar{b}$ si $\bar{a} = (2,-4)$, $|\bar{b}| = 2$ y el ángulo que forman los vectores $\bar{a}$ a y $\bar{b}$ es de 60°.

Solución.

Teniendo en cuenta el tipo de datos que nos dan, el producto escalar lo hacemos por la definición.

$$\bar{a} \circ \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha$$

Siendo α el ángulo que forman los vectores.

El módulo de $\bar{a}$: $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$

$$\bar{a} \circ \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha = \sqrt{20} \cdot 2 \cdot \cos 60° = 4\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{5}$$

3. Hallar el producto escalar y el ángulo que forman los vectores $\bar{v}(3,4)$ y $\bar{w} = (-4,3)$.

Solución.

$$\bar{v} \circ \bar{w} = (3,4) \circ (-4,3) = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 = 0$$

Si $\bar{v} \circ \bar{w} = 0 \wedge \left\{ \begin{matrix} \bar{v} \neq 0 \\ \bar{w} \neq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \bar{v} \perp \bar{w}$

Si son perpendiculares, el ángulo que forman es de 90°

4. Calcular los ángulos y la longitud de los lados del triángulo ABC, sabiendo que las coordenadas de sus vértices son los puntos A(0,0), B(1,3) y C(4,2).

Solución.

Para calcular el ángulo correspondiente a un vértice es preciso tomar los vectores con origen en dicho vértice.

$$\left.\begin{matrix} \overline{AB} \\ \overline{AC} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A} : \left.\begin{matrix} \overline{AB} \\ \overline{CA} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 180° - \hat{A}$$

Vectores necesarios:

$$\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = (1-0, 3-0) = (1,3) \Rightarrow \overline{BA} = (-1,-3)$$
$$\overline{AC} = \bar{c} - \bar{a} = (4-0, 2-0) = (4,2) \Rightarrow \overline{CA} = (-4,-2)$$
$$\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b} = (4-1, 2-3) = (3,-1) \Rightarrow \overline{BA} = (-3,1)$$

Ángulos:

$$\cos\hat{A} = \frac{\overline{AB} \circ \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{(1,3) \circ (4,2)}{|(1,3)| \cdot |(4,2)|} = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$

$$\cos\hat{B} = \frac{\overline{BA} \circ \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{(-1,-3) \circ (3,-1)}{|(-1,-3)| \cdot |(3,-1)|} = \frac{(-1) \cdot 3 + (-3) \cdot (-1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{0}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = 0 \quad \hat{B} = 0°$$

Teniendo en cuenta el valor de la suma de los ángulos de en un triángulo:

$$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 160° - (45° + 90°) = 45°$$

Lados:

$$\text{Lado}(AB) = \left|\overline{AB}\right| = \left|(1,3)\right| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

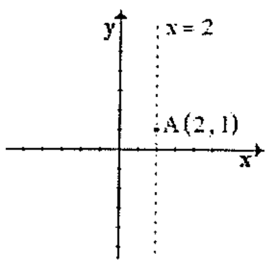
$$\text{Lado}(AC) = \left|\overline{AC}\right| = \left|(4,2)\right| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{Lado}(BC) = \left|\overline{BC}\right| = \left|(3,-1)\right| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$$

5. Hallar un punto B de la perpendicular a OX que pasa por A(2, 1) de tal forma que, los vectores de posición de ambos puntos formen entre sí un ángulo de 30°.

Solución.

Se pide determinar las coordenadas de un punto y para ello nos dan dos datos:



- El punto B, por pertenecer a la perpendicular a OX que pasa por A ($x = 2$), tendrá la forma $(2, y)$.
- El ángulo (α) que forman los vectores de posición de los puntos es de 30°, por aplicación la definición de producto escalar de dos vectores:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

$$\text{Siendo: } \begin{cases} \vec{a} = \overline{OA} = (2,1) \\ \vec{b} = \overline{OB} = (2,y) \end{cases}$$

Aplicando la expresión analítica del producto escalar.

$$\cos\alpha = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

$$\cos 60 = \frac{2\cdot 2+1\cdot y}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+y^2}} \qquad \frac{1}{2} = \frac{4+y}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4+y^2}}$$

Multiplicando en cruz para ordenar:

$$\sqrt{5\cdot\left(4+y^2\right)} = 8+2y$$

Elevando al cuadrado para eliminar la raíz y ordenando el resultado se obtiene una ecuación de segundo grado.

$$\left(\sqrt{5\cdot\left(4+y^2\right)}\right)^2 = (8+2y)^2$$

$$5\cdot\left(4+y^2\right) = 64+32y+4y^2$$

$$y^2-32y-44 = 0 : \begin{cases} y = 16+10\sqrt{3} \\ y = 16-10\sqrt{3} \end{cases}$$

Existen dos posibles puntos B, que cumplen las condiciones propuestas:

$$B = \left(2, 16+10\sqrt{3}\right) \text{ ó } B' = \left(2, 16-10\sqrt{3}\right)$$

6. Comprueba que el ángulo formado por los vectores $\vec{v} = \left(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1\right)$ y $\vec{w} = \left(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1\right)$ es de 60°.

Solución.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\circ\vec{w}}{\left|\vec{v}\right|\circ\left|\vec{w}\right|} = \frac{\left(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1\right)\circ\left(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1\right)}{\left|\left(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1\right)\right|\circ\left|\left(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1\right)\right|} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}+1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}+1^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}+1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \qquad \alpha = \text{ar}\cos\frac{1}{2} = 60°$$

7. Las componentes de $\bar{a}$ son $(\sqrt{3},1)$. Sabiendo que forma un ángulo de 60° con $\bar{b}$ y tienen igual módulo, calcular las componentes de $\bar{b}$.

Solución.

Se pide calcular las componentes de un vector $\bar{b}=(b_1,b_2)$ que cumpla dos condiciones:

1. $|\bar{a}|=|\bar{b}| : \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{b_1^2+b_2^2} \qquad b_1^2+b_2^2=4$

2. $\cos 60=\dfrac{\bar{a}\circ\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} : |\bar{a}|=|\bar{b}|=2 : \cos 60=\dfrac{(\sqrt{3},1)\circ(b_1,b_2)}{2\cdot 2} : \dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}b_1+b_2}{4} : \sqrt{3}b_1+b_2=2$

Cada una de las condiciones genera una ecuación por lo que se puede plantear un sistema.

$$S:\begin{cases} b_1^2+b_2^2=4 \\ \sqrt{3}b_1+b_2=2 \end{cases}$$

El sistema, se resuelve por sustitución (lo más sencillo es despejar b_1 de la 2ª ecuación y sustituir en la primera).

$$b_1=\frac{2-b_2}{\sqrt{3}} \quad : \quad \left(\frac{2-b_2}{\sqrt{3}}\right)^2+b_2^2=4 \quad : \quad \frac{(2-b_2)^2}{3}+b_2^2=4 \quad : \quad \frac{2^2-4b_2+b_2^2+3b_2^2}{3}=4$$

$$4b_2^2-4b_2-8=0:\begin{cases} b_2=-1 \\ b_2=2 \end{cases}$$

Conocido b_2 se calcula b_1.

$$b_1=\frac{2-b_2}{\sqrt{3}}:\begin{cases} b_2=-1 \Rightarrow b_1=\dfrac{2-(-1)}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3} : \bar{b}=(\sqrt{3},-1) \\ b_2=2 \Rightarrow b_1=\dfrac{2-2}{\sqrt{3}}=0 : \bar{b}=(0,2) \end{cases}$$

8. Calcular s de modo que $\bar{a}(1,s)$ y $\bar{b}(-3,s)$ sean perpendiculares.

Solución.

Si el producto escalar de dos vectores no nulos es cero, los vectores son perpendiculares.

$$\bar{a}\perp\bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\circ\bar{b}=0$$

$$\bar{a}\circ\bar{b}=(1,s)\circ(-3,s)=0$$

$$1\cdot(-3)+s\cdot s=0 \qquad s^2-3=0 \qquad s=\pm\sqrt{3}$$

9. Hallar las componentes de un vector unitario y perpendicular al segmento $\overline{AB}$, siendo $A(-1,2)$ y $B(-3,-4)$.

Solución.

El vector unitario de $\overline{AB}$ se obtiene dividiendo las componentes del vector por su módulo, y se denomina vector normalizado $(\overline{AB_n})$.

$$\overline{AB_n}=\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}$$

$$\overline{AB}=\bar{b}-\bar{a}=(-3,-4)-(-1,2)=(-2,-6)$$

$$|\overline{AB}|=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$\overline{AB_n}=\frac{(-2,-6)}{\pm 2\sqrt{10}}=\left(\frac{-2}{\pm 2\sqrt{10}},\frac{-6}{\pm 2\sqrt{10}}\right)=\left(\frac{-1}{\pm\sqrt{10}},\frac{-3}{\pm\sqrt{10}}\right)$$

$$\overline{AB_n}=\left(\frac{-1}{\sqrt{10}},\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)=\left(\frac{-\sqrt{10}}{10},\frac{-3\sqrt{10}}{10}\right) \text{ Unitario de igual dirección y sentido}$$

$$\overline{AB}'_n = \left(\frac{-1}{-\sqrt{10}}, \frac{-3}{-\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$ Unitario de igual dirección y sentido opuesto

El vector perpendicular al unitario (ortonormal), y en general, el vector perpendicular a uno conocido, se obtiene intercambiando las componentes de posición y a una de signo (a cualquiera).

$$\overline{AB}_{on} = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) \quad \text{ó} \quad \overline{AB}_{on} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$$

10. Dados los vectores $\bar{a} = (1,4)$ y $\bar{b} = (6,2)$, determina el ángulo que forma la bisectriz de estos vectores con el eje OX.

Solución.

El ángulo que forma la bisectriz a los dos vectores con el eje OX (α) es la media aritmética del ángulo que forma cada vector con el eje OX.

El ángulo que forma un vector con el eje OX es el ángulo que forma con su vector representativo ($\bar{i} = (1,0)$).

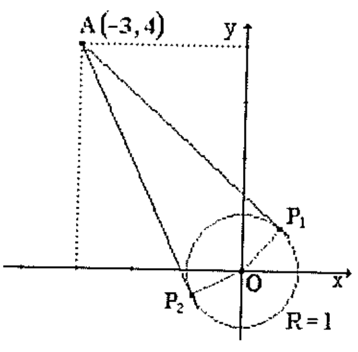
Si denominamos α_1 y α_2 a los ángulos que forma cada vector con OX:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\bar{a} \circ \bar{i}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{i}|} = \frac{(1,4) \circ (1,0)}{|(1,4)| \cdot |(1,0)|} = \frac{1 \cdot 1 + 4 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} : \alpha_1 = \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} \approx 75'96^{\circ} = 75^{\circ}58'$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{\bar{a} \circ \bar{i}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{i}|} = \frac{(6,2) \circ (1,0)}{|(1,4)| \cdot |(1,0)|} = \frac{6 \cdot 1 + 2 \cdot 0}{\sqrt{6^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{6}{\sqrt{40}} : \alpha_2 = \arccos\frac{6}{\sqrt{40}} \approx 18'43^{\circ} = 18^{\circ}26'$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{75^{\circ}58' + 18^{\circ}26'}{2} = 47^{\circ}12'$$

11. Deseamos trazar la tangente desde un punto A a una circunferencia. Sabiendo que las coordenadas de A son $(-3, 4)$ y que la circunferencia está centrada en el origen de ordenadas y es de radio unidad, calcular las coordenadas del punto de tangencia P(x, y).



Solución.

El punto buscado P(x, y) forma dos vectores, el $\overline{OP}$ y el $\overline{AP}$. Del primero conocemos su módulo por ser el radio de la circunferencia, y su posición relativa respecto al segundo, son perpendiculares, por ser radio ($\overline{OP}$) y tangente ($\overline{AP}$). Cada una de estas condiciones permite plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\overline{OP} = (x, y) \Rightarrow |\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$\overline{OP} \perp \overline{AP} \Rightarrow \overline{OP} \circ \overline{AP} = 0$$

$$\overline{AP} = \bar{p} - \bar{a} = (x - (-3), y - 4) = (x + 3, y - 4)$$

$$\overline{OP} \circ \overline{AP} = (x, y) \circ (x + 3, y - 4) = 0$$

$$x \cdot (x + 3) + y \cdot (y - 4) = 0 : x^2 + 3x + y^2 - 4y = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0 \end{cases} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 1 + 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

El sistema se resuelve por sustitución, de la segunda ecuación:

$$y = \frac{3x + 1}{4}$$

Se sustituye en la 1ª

$$x^2+\left(\frac{3x+1}{4}\right)^2=1 : x^2+\frac{(3x+1)^2}{16}=1 : 16x^2+9x^2+6x+1=16 : 25x^2+6x-15=0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-3+8\sqrt{6}}{25} : y_1=\dfrac{\dfrac{-3+8\sqrt{6}}{25}+1}{4}=\dfrac{4+6\sqrt{6}}{25}\Rightarrow P_1=\left(\dfrac{-3+8\sqrt{6}}{25},\dfrac{4+6\sqrt{6}}{25}\right) \\ x_2=\dfrac{-3-8\sqrt{6}}{25} : y_2=\dfrac{\dfrac{-3-8\sqrt{6}}{25}+1}{4}=\dfrac{4-6\sqrt{6}}{25}\Rightarrow P_2=\left(\dfrac{-3-8\sqrt{6}}{25},\dfrac{4-6\sqrt{6}}{25}\right) \end{cases}$$

Se obtienen dos posibles puntos, tal y como muestra la figura.

12. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-1)$ y $\vec{v}=(-1,2)$ hallar:

a) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

b) El vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

Solución.

a. Por definición: $\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}=\dfrac{\vec{u}\circ\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{(1,-1)\circ(-1,2)}{|(-1,2)|}=\frac{1\cdot(-1)+(-1)\cdot 2}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\frac{-3}{\sqrt{5}}$$

b. Si denominamos $\vec{\omega}$ al vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\vec{\omega}=\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}\cdot\vec{v}_N$$

Siendo $\vec{v}_N$ el vector normalizado de $\vec{v}$.

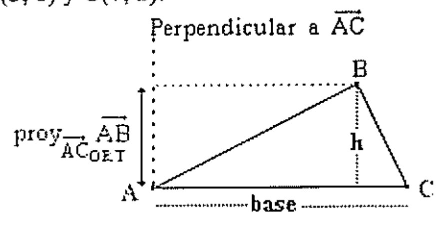
$$\vec{v}_N=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{(-1,2)}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Conocido $\vec{v}_N$, y la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, se calcula $\vec{\omega}$.

$$\vec{\omega}=\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}\cdot\vec{v}_N=\frac{-3}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\left(\frac{3}{5},\frac{-6}{5}\right)$$

13. Hallar el área de un triángulo de vértices A(1, 3), B(3, 6) y C(7, 2).

El área de cualquier triángulo $\left(A=\dfrac{1}{2}\text{base}\times\text{altura}\right)$ se puede obtener como aplicación del producto escalar. Si en el triángulo de la figura se toma como base la longitud del segmento AC, la altura será el valor absoluto de la proyección del segmento $\overline{AB}$ sobre la dirección ortogonal (perpendicular) al segmento $\overline{AC}$.



$$\text{Área ABC}=\left|\overline{AC}\right|\cdot\left|\text{proy}_{\overline{AC}_{ORT}}\overline{AB}\right|$$

$$\overline{AC}=\vec{c}-\vec{a}=(7-2,2-3)=(5,-1) : \left|\overline{AC}\right|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$$

$$\text{Si } \overline{AC}=(5,-1)\Rightarrow\overline{AC}_{ORT}=(1,5)$$

$$\overline{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(3-1,6-3)=(2,3)$$

$$\text{proy}_{\overline{AC}_{ORT}}\overline{AB}=\frac{\overline{AB}\circ\overline{AC}_{ORT}}{\left|\overline{AC}_{ORT}\right|}=\frac{(2,3)\circ(1,5)}{|(1,5)|}=\frac{2\cdot 1+3\cdot 5}{\sqrt{1^2+5^2}}=\frac{17}{\sqrt{26}}$$

$$\text{Área ABC} = \left|\overline{AC}\right| \cdot \left|\text{proy}_{\overline{AC}_{ORT}} \overline{AB}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{26} \cdot \frac{17}{\sqrt{26}} = \frac{17}{2} u^2$$

14. Si $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ es una base ortonormal y $\bar{a} = -2\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2$; $\bar{b} = 5\bar{u}_1 - 3\bar{u}_2$, hallar a_2 para que el producto escalar de $\bar{a} \circ \bar{b} = 6$.

Solución.

Los vectores que forman una base ortonormal son perpendiculares entre si y de módulo unidad, por lo tanto, los productos escalares por ellos mismos son la unidad y los productos cruzados entre ellos son nulos.

$$\bar{u}_1 \circ \bar{u}_1 = \bar{u}_2 \circ \bar{u}_2 = |\bar{u}|_1 \cdot |\bar{u}_1| \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\bar{u}_1 \circ \bar{u}_2 = \bar{u}_2 \circ \bar{u}_1 = |\bar{u}_1| \cdot |\bar{u}_2| \cdot \cos 90 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\bar{a} \circ \bar{b} = (-2\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2) \circ (5\bar{u}_1 - 3\bar{u}_2) = -10\bar{u}_1 \circ \bar{u}_1 + 6\bar{u}_1 \circ \bar{u}_2 + 5a_2\bar{u}_2 \circ \bar{u}_1 - 3a_2\bar{u}_2 \circ \bar{u}_2 =$$

$$= -10 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 5a_2 \cdot 0 - 3a_2 \cdot 1 = -10 - 3a_2 = 6 : a_2 = \frac{-16}{3}$$

15. Probar que los vectores $\bar{u}_1 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ y $\bar{u}_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ forman una base ortonormal, Hallar las coordenadas de vector $\bar{v} = (2, -1)$ respecto de dicha base.

Solución.

Una base ortonormal esta formada por vectores perpendiculares de módulo unidad.

Módulos: $$|\bar{u}_1| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

$$|\bar{u}_2| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

Perpendiculares $\Leftrightarrow$ $\bar{u}_1 \circ \bar{u}_2 = 0 : \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \circ \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} - \frac{12}{25} = 0$

Los vectores forman una base ortonormal ó canónica.

Para expresar $\bar{v}$ en función de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ hay que buscar dos números reales (α, β) tales que:

$$\bar{v} = \alpha \cdot \bar{u}_1 + \beta \cdot \bar{u}_2$$

$$(2, -1) = \alpha \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) + \beta \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Descomponiendo la igualdad por componentes se llega a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 1^a : 2 = \frac{3}{5}\alpha + \frac{4}{5}\beta \\ 2^a : -1 = -\frac{4}{5}\alpha + \frac{3}{5}\beta \end{cases} : \begin{cases} 3\alpha + 4\beta = 10 \\ -4\alpha + 3\beta = -5 \end{cases} (\text{solución}) : \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\bar{v} = 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2$$

16. Probar que si $\vec{v} = (\cos\alpha, -\sin\alpha)$ y $\vec{u} = (\sin\alpha, \cos\alpha)$ son perpendiculares y unitarios.

Solución.

Una base ortonormal esta formada por vectores perpendiculares de módulo unidad.

Módulos: $|\vec{v}| = \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (-\sin\alpha)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{1} = 1$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2} = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \sqrt{1} = 1$$

Perpendiculares $\Leftrightarrow$ $\vec{v} \circ \vec{u} = 0$: $(\cos\alpha, -\sin\alpha) \circ (\sin\alpha, \cos\alpha) = 0$

$$\cos\alpha \cdot \sin\alpha + (-\sin\alpha) \cdot \cos\alpha = 0$$

Los vectores forman una base ortonormal ó canónica.

17. Probar que los puntos A(1,7),B(4,6),C(4,-2),D(6,2) pertenecen a una circunferencia de centro O(1,2).

Solución.

Si los puntos A, B, C y D pertenecen a la circunferencia de centro O será por que todos ellos están a igual distancia de O y por lo tanto, los módulos de los segmentos que determinan los puntos con el punto O serán iguales.

$$\left|\overline{OA}\right| = \left|\overline{OB}\right| = \left|\overline{OC}\right| = \left|\overline{OD}\right|$$

$$\overline{OA} = \vec{a} - \vec{o} = (1-1, 7-2) = (0,5) \Rightarrow \left|\overline{OA}\right| = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{OB} = \vec{b} - \vec{o} = (4-1, 6-2) = (3,4) \Rightarrow \left|\overline{OB}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{OC} = \vec{c} - \vec{o} = (4-1, -2-2) = (3,-4) \Rightarrow \left|\overline{OC}\right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{OD} = \vec{d} - \vec{o} = (6-1, 2-2) = (5,0) \Rightarrow \left|\overline{OD}\right| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

Todos los puntos están a cinco unidades de O, por lo tanto, pertenecen a la circunferencia de centro O y radio 5

18. Dados los puntos $A(-\sqrt{3},1)$, $B(5,-4)$, $C(-5,3)$ calcular el ángulo que forman $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Solución.

El ángulo entre vectores se calcula como aplicación del producto escalar. Si denominamos α al ángulo que forman $\overline{AB}$ con $\overline{AC}$:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB} \circ \overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right|}$$

$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \left(5 - \left(-\sqrt{3}\right), -4-1\right) = \left(5+\sqrt{3}, -5\right)$$

$$\overline{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \left(-5 - \left(-\sqrt{3}\right), 3-1\right) = \left(-5+\sqrt{3}, 2\right)$$

Sustituyendo

$$\cos\alpha = \frac{\left(5+\sqrt{3}, -5\right) \circ \left(-5+\sqrt{3}, 2\right)}{\left|\left(5+\sqrt{3}, -5\right)\right| \cdot \left|\left(-5+\sqrt{3}, 2\right)\right|} = \frac{\left(5+\sqrt{3}\right) \cdot \left(-5+\sqrt{3}\right) + (-5) \cdot 2}{\sqrt{\left(5+\sqrt{3}\right)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{\left(-5+\sqrt{3}\right)^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{-32}{\sqrt{53+10\sqrt{3}} \cdot \sqrt{32-10\sqrt{3}}} \approx -0'996 \Rightarrow \alpha = \arccos(-0'996) \approx 174'86^\circ = 174^\circ 52'$$

19. Hallar el valor de a para que los vectores $\vec{z} = (3,4)$ y $\vec{w} = (a,-2)$ formen un ángulo de 45º.

Solución.

Aplicando la definición de ángulo entre dos vectores se despeja el parámetro a. Si denominamos α al ángulo que forman los vectores $\vec{z}$ y $\vec{w}$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{z}\circ\vec{w}}{|\vec{z}|\cdot|\vec{w}|}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{(3,4)\circ(a,-2)}{|(3,4)|\cdot|(a,-2)|} \quad : \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\cdot a + 4\cdot(-2)}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{a^2+(-2)^2}} \quad : \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3a-8}{5\cdot\sqrt{a^2+4}}$$

Multiplicando en cruz se obtiene una ecuación irracional que se resuelve elevando al cuadrado los dos miembros.

$$5\sqrt{a^2+4}\cdot\sqrt{2} = 2\cdot(3a-8) \quad : \quad 5\sqrt{2a^2+8} = 6a-16 \quad : \quad \left(5\sqrt{2a^2+8}\right)^2 = (6a-16)^2$$

$$5^2\left(\sqrt{2a^2+8}\right)^2 = (6a)^2 - 2\cdot 6a\cdot 16 + 16^2 \quad : \quad 25\left(2a^2+8\right) = 36a^2 - 192a + 256$$

$$50a^2 + 200 = 36a^2 - 192a + 256 \quad : \quad 14a^2 + 192a - 56 = 0 \quad : \quad 7a^2 + 96a - 28 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen los posibles valores del parámetro a.

$$a = \frac{-96 \pm \sqrt{96^2 - 4\cdot 7\cdot(-28)}}{2\cdot 7} = \frac{-96 \pm 100}{14} : \begin{cases} a = 2/7 \\ a = -14 \end{cases}$$

20. Hallar un vector unitario en la misma dirección y sentido que el vector $\vec{z} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$. Hallar otro igual pero en sentido opuesto.

Solución.

Si denominamos $\vec{u}$ al vector unitario en la misma dirección y sentido:

$$\vec{u} = \frac{\vec{z}}{|\vec{z}|} = \frac{(4,-3)}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{(4,-3)}{\sqrt{25}} = \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$$

El vector de sentido opuesto $(\vec{\omega})$ será el vector opuesto a $\vec{u}$ (el mismo pero de signo cambiado)

$$\vec{\omega} = -\vec{u} = -\left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

21. Hallar un vector de módulo 10 en la dirección de $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

Solución.

Si denominamos $\vec{u}$ al vector unitario en la misma dirección que $\vec{a}$ y de módulo 10:

$$\vec{u} = 10\,\vec{a}_N$$

Donde $\vec{a}_N$ es el vector $\vec{a}$ normalizado (de módulo la unidad).

$$\vec{u} = 10\,\vec{a}_N = 10\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = 10\frac{(4,3)}{\sqrt{4^2+3^2}} = 10\frac{(4,3)}{5} = (8,6)$$

22. Dados los vectores $\vec{u} = (4,-3)$ y $\vec{v} = (1,m)$. Calcula el valor de m para que:

a) Angulo formado entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60°

b) $\vec{u} + 2\vec{v}$ sea perpendicular a $2\vec{u} - \vec{v}$

Solución.

a. Si llamamos α al ángulo que forman los vectores:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\circ\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{(4,-3)\circ(1,m)}{\sqrt{4^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{1^2+m^2}} = \frac{4-3m}{5\sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{2}$$

Multiplicando en cruz para ordenar:

$$8 - 6m = 5\sqrt{1+m^2}$$

Elevando al cuadrado para quitar la raíz y ordenando se obtiene una ecuación de 2º grado.

$$(8-6m)^2 = 5^2\left(\sqrt{1+m^2}\right)^2$$
$$8^2 - 2\cdot 8\cdot 6m + 6^2 m^2 = 25\left(1+m^2\right)$$
$$64 - 96m + 36m^2 = 25 + 25m^2$$
$$11m^2 - 96m + 39 = 0$$
$$m = \frac{-(-96)\pm\sqrt{(-96)^2 - 4\cdot 11\cdot 39}}{2\cdot 11} = \frac{96\pm 50\sqrt{3}}{22} = \frac{48\pm 25\sqrt{3}}{11}$$

b. $\bar{u}+2\bar{v}$ sea perpendicular a $2\bar{u}-\bar{v}$

Solución.

Si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es cero.

$$\bar{u}+2\bar{v} = (4,-3)+2(1,m) = (4+2\cdot 1, -3+2\cdot m) = (6,-3+2m)$$
$$2\bar{u}-\bar{v} = 2(4,-3)-(1,m) = (2\cdot 4-1, 2\cdot(-3)-m) = (7,-6-m)$$

$$(6,-3+2m)\circ(7,-6-m) = 0$$
$$6\cdot 7 + (-3+2m)\cdot(-6-m) = 0$$
$$42 + 18 - 9m - 2m^2 = 0$$
$$-2m^2 - 9m + 60 = 0 : m = \frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2 - 4\cdot(-2)\cdot 60}}{2\cdot(-2)} = \frac{9\pm\sqrt{149}}{-4}$$

23. Hallar el producto escalar de los vectores $\bar{a} = 2\bar{u} - 3\bar{v}$ y $\bar{b} = 3\bar{u} + 2\bar{v}$ sabiendo que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ forman 30º y que $|\bar{u}| = 4$ y $|\bar{v}| = 5$.

Solución.

$$\bar{a}\circ\bar{b} = (2\bar{u}-3\bar{v})\circ(3\bar{u}+2\bar{v}) = 2\cdot 3\bar{u}\circ\bar{u} + 2\cdot 2\bar{u}\circ\bar{v} - 3\cdot 3\bar{v}\cdot\bar{u} - 3\cdot 2\bar{v}\circ\bar{v}$$

Teniendo en cuenta que el producto escalar es conmutativo $(\bar{u}\circ\bar{v} = \bar{v}\circ\bar{u})$ y efectuando las operaciones numéricas.

$$\bar{a}\circ\bar{b} = 6\cdot\bar{u}\circ\bar{u} - 5\cdot\bar{u}\circ\bar{v} - 6\cdot\bar{v}\circ\bar{v}$$

Los productos escalares $\bar{u}\circ\bar{u}$ y $\bar{v}\circ\bar{v}$, se resuelven por la definición.

$$\left.\begin{array}{r} \bar{u}\circ\bar{u} = |\bar{u}|\cdot|\bar{u}|\cdot\cos 0^\circ = |\bar{u}|^2 \\ \bar{v}\circ\bar{v} = |\bar{v}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos 0^\circ = |\bar{v}|^2 \\ \bar{u}\circ\bar{v} = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos 30^\circ \end{array}\right\} : \bar{a}\circ\bar{b} = 6\cdot|\bar{u}|^2 - 5\cdot|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos 30^\circ - 6\cdot|\bar{v}|^2$$

Sustituyendo por sus valores:

$$\bar{a}\circ\bar{b} = 6\cdot 4^2 - 5\cdot 4\cdot 5\cdot\cos 30^\circ - 6\cdot 5^2 = -54 - 50\sqrt{3}$$

24. Calcula a y b para que los vectores $\bar{v} = (-2,a)$ y $\bar{u} = (b,1)$ formen 60º y además $|\bar{u}| = \sqrt{5}$. **(1 punto)**

Solución.

Si $|\bar{u}| = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{b^2+1^2} = \sqrt{5} \Rightarrow b^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow b = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Si los vectores forman 60º, deben cumplir:

$$\cos 60^\circ = \frac{\bar{v}\circ\bar{u}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|} = \frac{(-2,a)\cdot(b,1)}{\sqrt{(-2)^2+a^2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{-2b+a}{\sqrt{20+5a^2}} = \frac{1}{2}$$

ordenando

$$-4b + 2a = \sqrt{20+5a^2}$$

- Si b = 2: $-8+2a=\sqrt{20+5a^2}$ elevando al cuadrado $(-8+2a)^2=\left(\sqrt{20+5a^2}\right)^2$

$$64-32a+4a^2=20+5a^2 \quad \text{ordenando} \quad a^2+32a-24=0$$

resolviendo:

$$x=\frac{-32\pm\sqrt{32^2-4\cdot1\cdot(-24)}}{2\cdot1}=\frac{-32\pm4\sqrt{70}}{2}=\begin{cases}=-16+2\sqrt{70}\\=-16-2\sqrt{70}\end{cases}$$

Por tanto, dos posibles soluciones son:

$$\bar{v}=\left(-2,-16+2\sqrt{70}\right) \quad \wedge \quad \bar{u}=(2,1)$$

ó

$$\bar{v}=\left(-2,-16-2\sqrt{70}\right) \quad \wedge \quad \bar{u}=(2,1)$$

- Si b = −2: $8+2a=\sqrt{20+5a^2}$ elevando al cuadrado $(8+2a)^2=\left(\sqrt{20+5a^2}\right)^2$

$$64+32a+4a^2=20+5a^2 \quad \text{ordenando} \quad a^2-32a-24=0$$

resolviendo:

$$x=\frac{-(-32)\pm\sqrt{(-32)^2-4\cdot1\cdot(-24)}}{2\cdot1}=\frac{32\pm4\sqrt{70}}{2}=\begin{cases}=16+2\sqrt{70}\\=16-2\sqrt{70}\end{cases}$$

Por tanto, las otras dos posibles soluciones son:

$$\bar{v}=\left(-2,16+2\sqrt{70}\right) \quad \wedge \quad \bar{u}=(-2,1)$$

ó

$$\bar{v}=\left(-2,16-2\sqrt{70}\right) \quad \wedge \quad \bar{u}=(-2,1)$$

25. Dados los vectores $\bar{v}=(1,-1)$ $\bar{u}=(2,x)$. Calcular x para que dichos vectores formen 45º.

Solución.

Por aplicación del producto escalar de vectores. Si denominamos α al ángulo que forman los vectores:

$$\cos\alpha=\frac{\bar{v}\circ\bar{u}}{|\bar{v}|\cdot|\bar{u}|}$$

$$\cos 45=\frac{(1,-1)\circ(2,x)}{|(1,-1)|\cdot|(2,x)|} : \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1\cdot2+(-1)\cdot x}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+x^2}} : \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-x}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+x^2}}$$

Multiplicando en cruz, ordenando y simplificando:

$$\sqrt{4+x^2}=2-x$$

Elevando al cuadrado para quitar la raíz:

$$\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2=(2-x)^2 : 4+x^2=2^2-2\cdot2\cdot x+x^2 : 4x=0 : x=0$$

26. Dados los vectores $\bar{a}\left(\sqrt{3},1\right), \bar{b}=\left(-\sqrt{3},1\right), \bar{c}=\left(1,-2\right)$ Calcular:

a) El ángulo que forma $\bar{a}$ y $\bar{b}$

b) Las coordenadas de un vector perpendicular a $\bar{c}$ de modulo 2

c) La proyección del vector $\bar{a}$ sobre $\bar{c}$

d) El vector proyección de $\bar{b}$ sobre $\bar{a}$

Solución.

a. Por aplicación del producto escalar de vectores. Si denominamos α al ángulo que forman los vectores.

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\circ\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\left(\sqrt{3},1\right)\circ\left(-\sqrt{3},1\right)}{\left|\left(\sqrt{3},1\right)\right|\cdot\left|\left(-\sqrt{3},1\right)\right|} = \frac{\sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+1\cdot 1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} : \quad \alpha = \arccos\frac{-1}{2} = 120^{\circ}$$

b. Si denominamos $\bar{u}$ al vector perpendicular a $\bar{c}$ de nódulo 2:

$$\bar{u} = 2\frac{\bar{c}_{Ort}}{|\bar{c}|} = \left\{\begin{matrix}\bar{c}=(1,-2)\\ \bar{c}_{Ort}=(2,1)\end{matrix}\right\} = 2\cdot\frac{(2,1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \left(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

c. $$\text{proy}_{\bar{c}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\circ\bar{c}}{|\bar{c}|} = \frac{\left(\sqrt{3},1\right)\circ(1,-2)}{|(1,-2)|} = \frac{\sqrt{3}\cdot 1+1\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{5}}$$

d. $\overline{\text{proy}_{\bar{a}}\bar{b}} = \text{proy}_{\bar{a}}\bar{b}\cdot\bar{a}_n$, siendo $\bar{a}_n \equiv$ Vector $\bar{a}$ normalizado (de módulo unidad).

$$\text{proy}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{b}\circ\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{\left(-\sqrt{3},1\right)\circ\left(\sqrt{3},1\right)}{\left|\left(\sqrt{3},1\right)\right|} = \frac{-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+1\cdot 1}{\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\bar{a}_n = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{\left(\sqrt{3},1\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Sustituyendo en la expresión:

$$\overline{\text{proy}_{\bar{a}}\bar{b}} = -1\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

27. Se tienen los vectores $\bar{v}=(4,0), \bar{u}=(1,5)$. Calcular el ángulo que forman los vectores $\bar{u}+\bar{v}$ y $\bar{u}-\bar{v}$.

Solución.

Si denominamos α al ángulo que forman los vectores:

$$\cos\alpha = \frac{(\bar{u}+\bar{v})\circ(\bar{u}-\bar{v})}{|(\bar{u}+\bar{v})|\cdot|(\bar{u}-\bar{v})|}$$

$$\bar{u}+\bar{v} = (1,5)+(4,0) = (5,5)$$
$$\bar{u}-\bar{v} = (1,5)-(4,0) = (-3,5)$$

$$\cos\alpha = \frac{(5,5)\circ(-3,5)}{|(5,5)|\cdot|(-3,5)|} = \frac{5\cdot(-3)+5\cdot 5}{\sqrt{5^2+5^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+5^2}} = \frac{10}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{34}} = \frac{10}{\sqrt{1700}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{17}}{17} \approx 76^{\circ}$$

28. Calcular los valores de m y de n para que los vectores

$$\vec{u}=\left(\frac{1}{3},m\right),\quad \vec{v}=\left(n,\frac{-1}{6}\right)$$

a) Sean unitarios
b) Sean ortogonales.
c) Si m = n = 1, calcular las proyecciones de $\vec{u}$ en $\vec{v}$ y de $\vec{v}$ en $\vec{u}$

Solución.

a. Vector unitario ≡ modulo unidad.

$$|\vec{u}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+m^2}=1 : \frac{1}{9}+m^2=1^2 : m^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9} : m=\pm\sqrt{\frac{8}{9}}=\pm\frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{n^2+\left(\frac{-1}{6}\right)^2}=1 : n^2+\frac{1}{36}=1^2 : n^2=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36} : n=\pm\sqrt{\frac{35}{36}}=\frac{\pm\sqrt{35}}{6}$$

b. Si dos vectores son ortogonales, forman 90º, y por tanto, su producto escalar es cero.

$$\vec{u}\circ\vec{v}=0 : \left(\frac{1}{3},m\right)\circ\left(n,\frac{-1}{6}\right)=0 : \frac{1}{3}\cdot n+m\cdot\frac{-1}{6}=0 : m-2n=0$$

Ecuación homogénea con infinitas soluciones. Para obtener una cualquiera de sus soluciones basta con dar un valor a una de las incógnitas y calcular la otra mediante la ecuación.

Si $n=1\Rightarrow m=2$

c. $\vec{u}=\left(\frac{1}{3},1\right),\quad \vec{v}=\left(1,\frac{-1}{6}\right)$

$$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{\vec{u}\circ\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{\left(\frac{1}{3},1\right)\circ\left(1,\frac{-1}{6}\right)}{\left|\left(1,\frac{-1}{6}\right)\right|}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1+1\cdot\frac{-1}{6}}{\sqrt{1^2+\left(\frac{-1}{6}\right)^2}}=\frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{1+\frac{1}{36}}}=\frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{37}{36}}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{37}}{6}}=\frac{1}{\sqrt{37}}=\frac{\sqrt{37}}{37}$$

$$\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}=\frac{\vec{u}\circ\vec{v}}{|\vec{u}|}=\frac{\left(\frac{1}{3},1\right)\circ\left(1,\frac{-1}{6}\right)}{\left|\left(\frac{1}{3},1\right)\right|}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1+1\cdot\frac{-1}{6}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1^2}}=\frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{9}+1}}=\frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{10}{9}}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{10}}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{20}$$

29. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son tales que: $|\vec{a}|=10$; $|\vec{b}|=5\sqrt{6}$; $|\vec{a}+\vec{b}|=20$. Hallar su producto escalar, el ángulo que forman entre ellos y los ángulos que forman cada uno de ellos con el vector suma.

Solución.

Producto escalar $(\vec{a}\circ\vec{b})$

El problema se resuelve a partir de la definición de módulo de un vector.

$$|\vec{u}|=+\sqrt{\vec{u}\circ\vec{u}}$$

Aplicando la definición al módulo de la suma y operando el producto escalar:

$$|\vec{a}+\vec{b}|=+\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\circ(\vec{a}+\vec{b})}=\sqrt{\vec{a}\circ\vec{a}+\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{b}\circ\vec{a}+\vec{b}\circ\vec{b}}$$

Teniendo en cuenta que el producto escalar es conmutativo y que el producto escalar de un vector por si mismo es el módulo del vector elevado al cuadrado:

$$\vec{a}\circ\vec{b}=\vec{b}\circ\vec{a}$$

$$\vec{a}\circ\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot 1=|\vec{a}|^2$$

$$\vec{b}\circ\vec{b}=|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 0=|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cdot 1=|\vec{b}|^2$$

Nota: El ángulo que forma un vector con el mismo es cero.

Sustituyendo en la definición de módulo

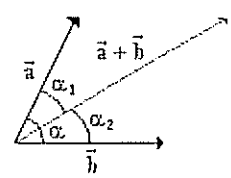
$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+2\,\vec{a}\circ\vec{b}+|\vec{b}|^2}$$

Elevando los dos miembros al cuadrado, se despeja el producto escalar de los vectores

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\,\vec{a}\circ\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$\vec{a}\circ\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)=\frac{1}{2}\left(20^2-10^2-\left(5\sqrt{6}\right)^2\right)=75$$

Ángulos.



Primero se calcula el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (α) como aplicación del producto escalar, conocido este se calcula el ángulo entre uno de ellos y el vector suma (por ejemplo α_1), por último el ángulo α_2 se calcula teniendo en cuenta que $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{75}{10\cdot 5\sqrt{6}}\ :\ \alpha=\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}\approx 52{,}2^\circ$$

$$\cos\alpha_1=\frac{\vec{a}\circ\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\circ\vec{a}+\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}|^2+\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{10^2+75}{10\cdot 20}=\frac{175}{200}=\frac{7}{8}\ :\ \alpha_1=\arccos\frac{7}{8}\approx 29^\circ$$

$$\alpha_2=\alpha-\alpha_1=52{,}2^\circ-29^\circ=23{,}2^\circ$$

30. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores de igual módulo y $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, calcular el producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y el ángulo que forman.

Solución.

Si denominamos α al ángulo que forman los vectores:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

El producto escalar $\vec{a}\circ\vec{b}$ se obtiene de la definición de módulo de la suma en función en función de los módulos de los vectores.

Aplicando la definición de módulo al módulo de la suma y operando el producto escalar:

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\circ\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}=\sqrt{\vec{a}\circ\vec{a}+\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{b}\circ\vec{a}+\vec{b}\circ\vec{b}}$$

Teniendo en cuenta que el producto escalar es conmutativo y que el producto escalar de un vector por si mismo es el módulo del vector elevado al cuadrado:

$$\vec{a}\circ\vec{b}=\vec{b}\circ\vec{a}\Rightarrow\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{b}\circ\vec{a}=2\,\vec{a}\circ\vec{b}$$

$$\vec{a}\circ\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot 1=|\vec{a}|^2$$

$$\vec{b}\circ\vec{b}=|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 0^\circ=|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cdot 1=|\vec{b}|^2$$

Sustituyendo en la definición de módulo de la suma:

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+2\,\vec{a}\circ\vec{b}+|\vec{b}|^2}$$

Elevando los dos miembros al cuadrado, se despeja el producto escalar de los vectores.

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + 2\,\vec{a}\circ\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2$$

$$\vec{a}\circ\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2\right)$$

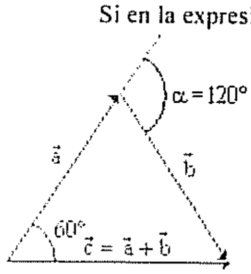
El módulo de la suma se puede obtener del enunciado. Si $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b} \Rightarrow \left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ (si dos vectores son iguales, sus módulos también lo son), y como $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right|$, se puede concluir:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Sustituyendo en la expresión del producto escalar:

$$\vec{a}\circ\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2\right) = -\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2$$

Si en la expresión del ángulo entre vectores sustituimos todo en función del módulo de $\vec{a}$:



$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \left\{\begin{array}{c} \vec{a}\circ\vec{b} = -\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2 \\ \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| \end{array}\right\} = \frac{-\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = \arccos -\frac{1}{2} = 120^\circ$$

Si $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$ y $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right|$, los tres vectores forman un triángulo equilátero

31. Sea el triángulo de vértices A(2, 3), B(1, 0) y C(3, 4). Calcular:

i. Módulo de $\overline{AB}$
ii. Ángulo de $\overline{AB}$ con $\overline{AC}$
iii. Proyección de $\overline{AB}$ sobre el eje x
iv. Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$
v. Vector unitario en la dirección de $\overline{AC}$
vi. Vector proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$
vii. Área del triángulo
viii. Determina el valor de a para que el vector (a, −1) sea ortogonal al vector $\overline{BC}$
ix. Valor de a para que el punto (a, 2) forme con B y C un triángulo de área 4 unidades cuadradas.

Solución.

i. $\overline{AB} = \vec{b}-\vec{a} = (1-2, 0-3) = (-1,-3)$; $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$

ii. Se denominamos α al ángulo que forman los vectores:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}\circ\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|} = \left\{\begin{array}{c} \overline{AB} = (-1,-3) \\ \overline{AC} = \vec{c}-\vec{a} = (3-2, 4-3) = (1,1) \end{array}\right\} = \frac{(-1,-3)\circ(1,1)}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{-1\cdot 1+(-3)\cdot 1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}} =$$

$$\cos\alpha = \frac{-4}{\sqrt{20}} : \alpha = \arccos\frac{-4}{\sqrt{20}} = 170{,}5^\circ$$

iii. El representante del eje OX es el vector unitario $\vec{i} = (1,0)$

$$\text{proy}_{\vec{i}}\,\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\circ\vec{i}}{\left|\vec{i}\right|} = \frac{(-1,-3)\cdot(1,0)}{1} = -1\cdot 1+(-3)\cdot 0 = -1$$

iv. $\operatorname{proy}_{\overline{AC}} \overline{AB} = \dfrac{\overline{AB} \circ \overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|} = \dfrac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$

v. Vector unitario o normalizado. $\overline{AC}_N = \dfrac{\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|} = \dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

vi. $\overrightarrow{\operatorname{proy}_{\overline{AC}} \overline{AB}} = \operatorname{proy}_{\overline{AC}} \overline{AB} \cdot \overline{AC}_N = -2\sqrt{2} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-2,-2)$

vii. $\text{Área}(ABC) = \dfrac{\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC'}\right|}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{AC} = (1,1) \\ \overline{AC'} = (-1,1) \end{array} \right\} = \dfrac{\left|(-1,-3) \circ (-1,1)\right|}{2} = \dfrac{\left|-1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1\right|}{2} = \dfrac{2}{2} = 1u^2$

viii. Si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es cero.

$$(a,-1) \circ \overline{BC} = 0 \;:\; (a,-1) \circ (2,4) = 0 \;:\; a \cdot 2 + (-1) \cdot 4 = 0 \;:\; a = 2$$

ix. A(a, 2); B(1, 0); C(3, 4)

$$\text{Área}(ABC) = \frac{\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC'}\right|}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = (1-a, 0-2) = (1-a,-2) \\ \overline{AC} = (3-a, 4-2) = (3-a, 2) \\ \overline{AC'} = (-2, 3-a) \end{array} \right\} = \frac{\left|(1-a,-2) \circ (-2, 3-a)\right|}{2} =$$

$$= \frac{\left|(1-a) \cdot (-2) + (-2) \cdot (3-a)\right|}{2} = \frac{|4a-8|}{2} = 4 \;:\; \frac{4a-8}{2} = \pm 4 \;:\; 4a - 8 = \pm 8 : \begin{cases} + : a = 4 \\ - : a = 0 \end{cases}$$

10 S

1. Escribir en todas sus formas la ecuación de la recta que pasa por A(−5, 0) y cuyo vector director tiene por componentes (4, −3). ¿Pertenece a la recta el punto (0, 2).

Solución.

- Vectorial: $(x, y) = (-5, 0) + (4, -3)\cdot\lambda$
- Paramétricas: $\begin{cases} x = -5 + 4\lambda \\ y = -3\lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y}{-3}$
- General: $3x + 4y + 15 = 0$
- Explícita: $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{15}{4}$
- Punto-pendiente: $y = -\dfrac{3}{4}(x+5)$
- Canónica: $\dfrac{x}{-5} + \dfrac{y}{-15/4} = 1$

2. Dada la recta $r \equiv \dfrac{x+5}{-2} = \dfrac{y}{7}$, escribir las coordenadas de tres puntos de r, así como tres vectores directores.

Solución.

Puntos: Dando valores a una de las variables.

- Para $x = 1$: $y = -21 \Rightarrow (1, -21)$
- Para $x = -1$: $y = -14 \Rightarrow (-1, -14)$
- Para $x = -5$: $y = 0 \Rightarrow (-5, 0)$

Vectores: todos los proporcionales al vector de dirección

$$\vec{v} = (-2, 7);\ \vec{v}' = (2, -7);\ \vec{v}'' = (-4, 14)$$

3. Dada la recta $2x - 7y = 0$ indica un vector director y su pendiente.

Solución.

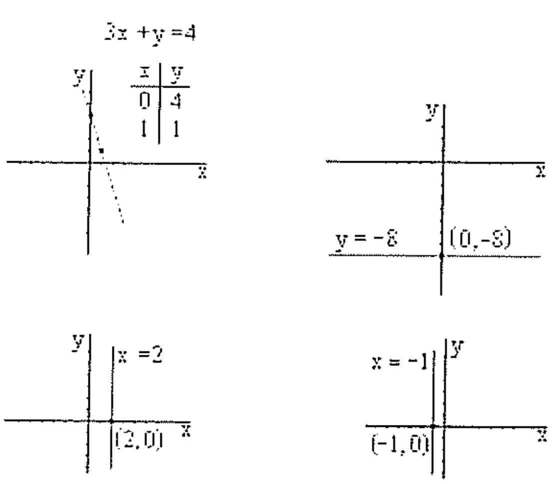
De la ecuación general $(Ax + By + C = 0)$, el vector de dirección y la pendiente son:

$$\vec{d}_r = (-B, A) = (-(-7), 2) = (7, 2)$$

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-7} = \frac{2}{7}$$

4. Dibuja las rectas $3x + y = 4$, $y = -8$, $x = 2$, $x = -1$

Solución.



5. Una recta corta a los ejes de coordenadas en los puntos (3,0) y (0,4). Hallar su ecuación explícita.
Solución.

Los datos que da el enunciado permiten escribir la forma canónica de la recta $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\right)$, siendo a y b la abscisa y ordenada respectivamente de los puntos de corte de la recta con los ejes coordenados.

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$$

Para pasarla a forma general se multiplica toda la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores y se ordena.

$$4x+3y=12\ :\ 4x+3y-12=0$$

6. Son paralelas las rectas $x-3=\frac{y+2}{-3}$ y $6x+2y-9=0$

Solución.

Si dos rectas son paralelas, sus vectores de dirección serán iguales o proporcionales.

$$\left.\begin{array}{r} x-3=\frac{y+2}{-3}:\vec{v}=(1,-3) \\ 6x+2y-9=0:\vec{u}=(-2,6) \end{array}\right\}:\vec{u}=2\vec{v}\ \text{ Rectas paralelas}$$

7. Dada la recta de ecuación $2x-5y+2=0$, escribir:

a) las coordenadas de un punto de la recta.
b) componentes de un vector director de la recta.
c) el punto en que dicha recta corta al eje de abscisas.

Solución.

Punto: Se obtienen dando valores a una de las dos variables y despejando la otra.

Para $y=0$: $2-5\cdot 0+2=0$; $x=-1$. Punto $(-1,0)$.

Vector de dirección. En la ecuación general, el vector de dirección es:

$$\vec{d}_r=(-B,A)$$

para la recta $2x-5y+2=0$, $\vec{d}_r=(-B,A)=(5,2)$

Pendiente. En la ecuación general, la pendiente viene expresada como:

$$m=-\frac{A}{B}=-\frac{2}{-5}=\frac{2}{5}$$

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,−2) y es paralela al eje de ordenadas.

Solución.

Si dos rectas son paralelas tienen el mismo vector de dirección. El vector de dirección del eje de ordenadas es el vector unitario $\vec{j}=(0,1)$, por lo tanto la recta que nos piden es:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-2+t \end{cases}$$

9. Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos A(1,3) y B(5,−2). Dar su pendiente y la ordenada en el origen.

Solución.

La forma más rápida de obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos es en continua, utilizando como punto uno de los que nos dan y como vector de dirección el vector formado por los dos puntos.

$$r_{AB}:\begin{cases} A=(1,3) \\ \overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(5-1,-2-3)=(4,-5) \end{cases}:\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-5}$$

Para obtener la pendiente y la ordenada en el origen se pasa la ecuación a forma explícita.

$$-5x + 5 = 4y - 12 \;;\; y = -\frac{5}{4}x + \frac{17}{4}$$

Pendiente: $-5/4$
Ordenada: $17/4$

10. Pasar la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ a forma continua, general, explícita y vectorial.

Solución.

Continua: se despeja el parámetro de cada una de la s ecuaciones y se igualan:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases} ; \begin{cases} t = x - 2 \\ t = \dfrac{y-3}{-5} \end{cases} ; r \equiv x - 2 = \frac{y-3}{-5}$$

General: De la continua, multiplicando en cruz y ordenando se llega a la general.

$$r \equiv x - 2 = \frac{y-3}{-5} ; -5 \cdot (x-2) = y - 3 ; -5x - y + 13 = 0$$

$$r \equiv 5x + y - 13 = 0$$

Explicita: Se despeja y

$$r \equiv y = -5x + 13$$

Vectorial: De las ecuaciones paramétricas se obtiene el punto A(2, 3) y el vector $\vec{v} = (1, -5)$.

$$(x, y) = (2, 3) + (1, -5) \cdot \lambda$$

11. Dada la recta $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2}$ escribir sus ecuaciones paramétricas. Hallar la ecuación general y explícita de dicha recta.

Solución.

De la ecuación continua se saca el punto (1, 0) y el vector de dirección (3, 2).

- Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 0 + 2\lambda \end{cases} = \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \forall \lambda \in R$

- General. De la continua, multiplicando en cruz y ordenando.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} \;:\; 2 \cdot (x-1) = 3y \;:\; 2x - 3y - 2 = 0$$

- Explicita. De la general despejando y.

$$2x - 3y - 2 = 0 \;:\; 3y = 2x - 2 \;:\; y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

12. Dada la recta $4x - 2y + 10 = 0$. Escribir una de sus ecuaciones paramétricas, la ecuación continua, la ecuación explícita y vectorial.

Solución.

Directamente de los coeficientes de la ecuación general se obtiene el vector de dirección. Para sacar un punto, se dan valores a una de las variables y se despeja la otra de la ecuación.

$Ax + By + C = 0 \;:\; \vec{v} = (-B, A)$

$4x - 2y + 10 = 0 \;;\; \vec{v} = (2, 4)$; Si $x = 2$: $4 \cdot 2 - 2y + 10 = 0$; $y = 7$, $P = (2, 7)$.

- Vectorial: $(x, y) = (2, 7) + (2, 4)\,\lambda \;\; \forall \lambda \in R$

- Paramétricas: $\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 7 + 4\lambda \end{cases} \forall \lambda \in R$

- Continua: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-7}{4}$

- Explicita: $y - 7 = \dfrac{4}{2}(x-2)$; $y = 2x + 3$

13. Estudiar la posición de las siguientes parejas de rectas.

a) $\begin{cases} x-y+5=0 \\ x+2y+5=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+5y-2=0 \\ -2x-10y+4=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y+3=0 \\ 2x-4y+7=0 \end{cases}$

Solución.

La posición relativa de dos rectas se estudia comparando los coeficientes de la ecuación general de ambas rectas.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} : \begin{cases} \text{Si } \dfrac{A_1}{A_2} \ne \dfrac{B_1}{B_2} : \text{Secantes} \\ \text{Si } \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \ne \dfrac{C_1}{C_2} : \text{Paralelas} \\ \text{Si } \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} : \text{Coincidentes} \end{cases}$$

a. $\begin{cases} x-y+5=0 \\ x+2y+5=0 \end{cases} : \dfrac{1}{1} \ne \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \text{Secantes}$

b. $\begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} : \dfrac{1}{2} \ne \dfrac{1}{-1} \Rightarrow \text{Secantes}$

c. $\begin{cases} x+5y-2=0 \\ -2x-10y+4=0 \end{cases} : \dfrac{1}{-2} = \dfrac{5}{-10} = \dfrac{-2}{4} \Rightarrow \text{Coincidentes}$

d. $\begin{cases} x+2y+3=0 \\ 2x-4y+7=0 \end{cases} : \dfrac{1}{2} \ne \dfrac{2}{-4} \Rightarrow \text{Secantes}$

14. Hallar m para que las restas 2x +3y +15 =0 y mx −y +7 =0 sean paralelas. para que sean perpendiculares.

Solución.

Para que sean paralelas: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} : \text{Si } \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \ne \dfrac{C_1}{C_2}$

$$\frac{2}{m} = \frac{3}{-1} : m = -\frac{2}{3}$$

Para que sean perpendiculares: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} : \text{Si } A_1A_2+B_1B_2=0$

$$2 \cdot m + 3 \cdot (-1) = 0 : m = \frac{3}{2}$$

15. Determinar m y n sabiendo que la recta mx +3y +n =0 pasa por (1.5) y es paralela a la recta 2x−4y−2=0.

Solución.

Si dos recta son paralelas. sus coeficientes de x e y en la ecuación general deben ser proporcionales.

$$\begin{cases} r \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ s \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \text{Si r es paralela a s}: \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

$$\text{Paralelas}: \begin{cases} mx + 3y + n = 0 \\ 2x - 4y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{3}{-4} : m = -\frac{3}{2}$$

Conocido el valor de m con la condición de paralelismo, el parámetro n se calcula con el punto de la recta. Si un punto pertenece a una recta, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la recta.

$$(1,5) \in -\frac{3}{2}x + 3y + n = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\cdot 1 + 3\cdot 5 + n = 0 : \quad n = \frac{27}{2}$$

$$-\frac{3}{2}x + 3y + \frac{27}{2} = 0$$

16. Si las ecuaciones de los lados de un triángulo son x −2y −1=0, x +3y −11=0 y 3x +4y −3 = 0, hallar sus vértices.

Solución.

Los vértices son los puntos de intersección de la recta que contienen a los lados. El punto de intersección de dos recta se obtiene resolviendo el sistema formado por la ecuaciones de las dos rectas.

$$A: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0 \end{cases} : A(5,2)$$

$$B: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 3x + 4y - 3 = 0 \end{cases} : B(1,0)$$

$$C: \begin{cases} 3x + 4y - 3 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0 \end{cases} : C(-7,6)$$

17. Si A(−1,3), B(3,1) y C(5,3) son los vértices de un triángulo, calcular las ecuaciones de las medianas y el punto donde se cortan.

Solución.

Mediana, recta que pasa por un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

Mediana de A: Se calcula con el punto A y el punto medio de $\overline{BC}$ (M).

$$M = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2}\right) = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (4, 2)$$

La mediana de A es la recta que pasa por A y por M

$$\begin{cases} A(-1,3) \\ M(4,2) \end{cases} : \begin{cases} A(-1,3) \\ \overline{AM} = (4-(-1), 2-3) = (5,-1) \end{cases} : \quad \frac{x-(-1)}{5} = \frac{y-3}{-1} : \quad x + 5y - 14 = 0$$

Mediana de B: Se calcula con el punto B y el punto medio de $\overline{AC}$ (N).

$$N = \left(\frac{a_1 + c_1}{2}, \frac{a_2 + c_2}{2}\right) = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+3}{2}\right) = (2, 3)$$

La mediana de B es la recta que pasa por B y por N

$$\begin{cases} B(3,1) \\ N(2,3) \end{cases} : \begin{cases} B(3,1) \\ \overline{BN} = (2-3, 3-1) = (-1, 2) \end{cases} : \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} : \quad 2x + y - 7 = 0$$

Mediana de C: Se calcula con el punto C y el punto medio de $\overline{AB}$ (P).

$$P = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (1, 2)$$

La mediana de C es la recta que pasa por C y por P.

$$\begin{cases} C(5,3) \\ P(1,2) \end{cases} : \begin{cases} C(5,3) \\ \overline{CP} = (1-5, 2-3) = (-4,-1) \end{cases} : \quad \frac{x-5}{-4} = \frac{y-3}{-1} : \quad x - 4y - 7 = 0$$

Baricentro. Es el punto de corte de las medianas de un triángulo. Para determinarlo basta con buscar la intersección de dos de las medianas.

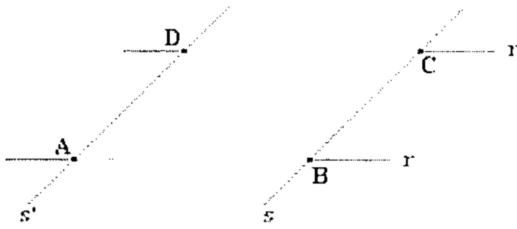
$$\text{Baricentro}:\begin{cases}\text{Mediana de A}: x+5y-14=0\\ \text{Mediana de B}: 2x+y-7=0\end{cases}:$$ Resolviendo el sistema se obtienen las coordenadas del baricentro $\left(\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right)$

Las coordenadas del baricentro, son la media aritmética de las coordenadas de los vértices del triángulo, esta propiedad, nos puede servir para comprobar si la solución es la correcta.

$$\text{Baricentro}:\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)=\left(\frac{-1+3+5}{3},\frac{3+1+3}{3}\right)=\left(\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right)$$

18. Los puntos A(2,2), B(5,4) y C(6,7) son vértices de un paralelogramo. Hallar las coordenadas del vértice D y las ecuaciones de sus lados.
Solución.

El punto P se calcula como intersección de las rectas r' y s', siendo r' la paralela a r que pasa por C y s' la paralela a s que pasa por A.



r': Con el punto C(6, 7) y con el vector $\overline{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(5-2,4-2)=(3,2)$

$$r':\frac{x-6}{3}=\frac{y-7}{2}\ ;\ r': 2x-3y+9=0$$

s': Con el punto A(2, 2) y con el vector $\overline{BC}=\vec{c}-\vec{a}=(6-5,7-4)=(1,3)$

$$s':\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{3}\ ;\ s': 3x-y-4=0$$

El punto D es la intersección de r' y s'.

$$D:\begin{cases}2x-3y+9=0\\ 3x-y-4=0\end{cases}:\ D\quad(3,5)$$

19. Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(1,5) y es paralela x +2y +2 =0.
Solución.

Se puede hacer de varias formas.

Si dos rectas son paralelas, tienen igual o proporcional vector de dirección. De la recta paralela se obtiene el vector de dirección de la recta buscada, que junto con el punto nos permite expresar la ecuación continua de forma sencilla, y de esta pasarla a la que nos pidan, generalmente explícita o general.

$$r\equiv x+2y+2=0:\vec{v}=(-2,1)$$

La recta s paralela a r que pasa por A es:

$$s\equiv\begin{cases}A=(1,5)\\ \vec{v}=(-2,1)\end{cases}:\qquad \frac{x-1}{-2}=\frac{y-5}{1}\ \text{Ordenando: } x+2y-11=0$$

Dos rectas paralelas tienen igual pendiente. De la recta paralela se obtiene la pendiente y con esta y el punto A se obtiene la ecuación punto pendiente de la paralelas.

$$r\equiv x+2y+2=0: m=-\frac{A}{B}=-\frac{1}{2}$$

$$s\equiv\begin{cases}A=(1,5)\\ m=-\frac{1}{2}\end{cases}:\qquad (y-5)=-\frac{1}{2}(x-1)\ \text{Ordenando: } x+2y-11=0$$

El haz de rectas paralelas tiene por expresión:

$$x + 2y - K = 0 \quad \forall K \in R$$

De las infinitas recta que representa el haz, se busca la pasa por el punto A, por lo tanto el punto A debe cumplir la ecuación de la recta y nos permite calcular el valor del parámetro K.

$$1 + 2 \cdot 5 + K = 0 \;:\; K = -11$$

$$x + 2y - 11 = 0$$

20. Dadas las rectas $r \equiv (x, y) = (5, -3) + t \cdot (7, -6)$ y s: $3x - 2y + 9 = 0$ hallar el punto donde se cortan.

Solución.

Se puede hacer de varias formas, pero lo más sencillo en mi opinión es expresar las rectas en forma, la solución del sistema que forman las dos ecuaciones son las coordenadas del punto de tangencia.

$$r \equiv (x, y) = (5, -3) + t \cdot (7, -6) \;:\; r \equiv \frac{x-5}{7} = \frac{y+3}{-6} \;:\; r \equiv 6x + 7y - 9 = 0$$

$$P : \begin{cases} r \equiv 6x + 7y - 9 = 0 \\ s \equiv 3x - 2y + 9 = 0 \end{cases} : P = \left(-\frac{15}{11}, \frac{27}{11} \right)$$

21. En que puntos corta la recta $3x - 2y + 6 = 0$ a los ejes de coordenadas.

Solución.

Lo más rápido es pasar la ecuación a forma canónica, siendo los denominadores de la expresión los puntos de corte con los ejes coordenados.

$$3x - 2y + 6 = 0 \;:\; 3x - 2y = -6 \;:\; \frac{3x}{-6} + \frac{-2y}{-6} = \frac{-6}{-6} \;:\; \frac{x}{-6/3} + \frac{y}{-6/-2} = 1 \;:\; \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$$

Punto de corte con OX: $(-2, 0)$

Punto de corte con OY: $(0, 3)$

Otra forma sería resolviendo los sistemas que forma la ecuación de la recta con las ecuaciones respectivas de los ejes (OX: $y = 0$; OY: $x = 0$).

$$OX : \begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} : A = (-2, 0) ; \quad OY : \begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} : B = (0, 3)$$

22. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(3, -9)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(8, 5)$ y $(-3, 2)$.

Solución.

Se toma como vector de dirección el vector formado entre los puntos $A(8, 5)$ y $B(-3, 2)$, y se utiliza como punto el $C(3, -9)$ por pasar la recta por él.

$$r \equiv \begin{cases} C = (3, -9) \\ \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-3 - 8, 5 - 2) = (-11, 3) \end{cases} : \frac{x-3}{-11} = \frac{y+9}{3} \quad \text{Ordenando } 3x + 11y + 90 = 0$$

23. Hallar la ecuación de la recta paralela a $8x - 7y + 3 = 0$ y que pasa por $(2, 3)$.

Solución.

El haz de rectas paralelas a $8x - 7y + 3 = 0$ es:

$$8x - 7y + K = 0; \forall K \in R$$

Para calcular el parámetro K, se tiene en cuenta que la recta del haz que pasa por el punto $(2, 3)$, se cumple para las coordenadas del punto, sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del haz se calcula el parámetro K.

$$8 \cdot 2 - 7 \cdot 3 + K = 0 \;;\; K = 5$$

Sustituyendo el valor de K se obtiene la ecuación de la recta paralela a $8x - 7y + 3 = 0$ que pasa por $(2, 3)$.

$$8x - 7y + 5 = 0$$

24. Las rectas $2mx - (m-5)y - m = 0$ y $9x - 9y - 8 = 0$ son paralelas. Hallar m.

Solución.

El problema se puede hacer de tres formas diferentes:

i. Comparando los coeficientes de las ecuaciones generales de ambas rectas.

ii. Teniendo en cuenta que si dos rectas son paralelas tienen igual pendiente.

iii. Si dos rectas son paralelas, sus vectores de dirección son proporcionales.

i. $$\begin{cases} r \equiv 2mx + (m-5)y - m = 0 \\ s \equiv 9x - 9y + 8 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{PARALELAS}} \frac{2m}{9} = \frac{m-5}{-9} \neq \frac{-m}{8}$$

La primera igualdad permite calcular el valor de m. la segunda desigualdad. confirma que las recta son paralelas y no coincidentes.

$$\frac{2m}{9} = \frac{m-5}{-9} \ ; \ 2m = \frac{m-5}{-1} \ : \ 2m = -m + 5 \ ; \ 3m = 5 \ ; \ m = \frac{5}{3}$$

Se comprueba: $$\frac{2 \cdot \frac{5}{3}}{9} = \frac{\frac{5}{3} - 5}{-9} \neq \frac{-\frac{5}{3}}{8} \rightarrow \frac{10}{27} = \frac{-10}{-27} \neq \frac{-5}{24} \Rightarrow \text{PARALELAS}$$

ii. $$\left.\begin{array}{l} r \equiv 2mx + (m-5)y - m = 0 : \text{pendiente} = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{2m}{m-5} \\ s \equiv 9x - 9y + 8 = 0 : \text{pendiente} = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{9}{-9} = 1 \end{array}\right\} : -\frac{2m}{m-5} = 1 : -2m = m - 5 : m = \frac{5}{3}$$

iii. $$\begin{cases} r \equiv 2mx + (m-5)y - m = 0 : \vec{d}_r = (-B, A) = (-(-m-5), 2m) = (5-m, 2m) \\ s \equiv 9x - 9y + 8 = 0 : \vec{d}_s = (-B, A) = (-(-9), 9) = (9, 9) \end{cases}$$

$$\vec{d}_r = k \cdot \vec{d}_s \ ; \ (5-m, 2m) = k \cdot (9, 9) \ : \ \begin{cases} 1^{a} : 5 - m = k \cdot 9 \\ 2^{a} : 2m = k \cdot 9 \end{cases}$$

Igualando:

$$5 - m = 2m \ . \ m = \frac{5}{3}$$

25. Hallar "a" para que las rectas $r \equiv ax + (a-1)y - 2(a+2) = 0$ y $s \equiv 3ax - (3a+1)y - (5a+4) = 0$ sean perpendiculares.

Solución.

Si dos rectas son perpendiculares, el producto escalar de sus vectores de dirección debe ser cero.

$$\left.\begin{array}{r} \vec{d}_r = (-B, A) = (-(a-1), a) \\ \vec{d}_s = (-B, A) = (-(-(3a+1)), 3a) \end{array}\right\} : \vec{d}_r \circ \vec{d}_s = 0 : (1-a, a) \circ (3a+1, 3a) = 0$$

$$(1-a) \cdot (3a+1) + a \cdot 3a = 0 \ ; \ 3a + 1 - 3a^2 - a + 3a^2 = 0 \ ; \ 2a + 1 = 0$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

26. Las rectas $r \equiv 3x - my = 5$ y $s \equiv 2x + ny = 7$ son perpendiculares. Hallar m y n sabiendo que s pasa por el punto (2,1).

Solución.

En el problema se pide calcular dos parámetros y se dan dos datos. que permiten plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.=

Si dos rectas dadas en forma general ($A_1x + B_1y + C_1 = 0$: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$) son perpendiculares. sus coeficientes deben cumplir la siguiente relación.

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

Aplicando a las ecuaciones propuestas:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv 3x - my - 5 = 0 \\ s \equiv 2x + ny - 7 = 0 \end{array}\right\} : r \perp s \Leftrightarrow 3 \cdot 2 + (-m) \cdot n = 0 \ ; \ 6 - m \cdot n = 0 \ ; \ m \cdot n = 6$$

Si el punto (2, 1), pertenece a la recta s, sus coordenadas cumplirán la ecuación de la recta.

$$(2,1) \in s \equiv 2x + ny - 7 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 + n \cdot 1 - 7 = 0 \ : \ n = 3$$

Sustituyendo el valor de n en la condición de perpendicularidad se obtiene m.

$$m \cdot n = 6 \xrightarrow{n=3} m \cdot 3 = 6 \ : \ m = 2$$

27. Las rectas $r \equiv ax - 4y + 4 = 0$ y $r' \equiv 2x - y + 1 = 0$ son perpendiculares y concurren en un punto de la recta $3x + by = 10$. Hallar a, b y el punto común.

Solución.

La condición de perpendicularidad entre r y r' nos permite calcular a. Conocido a, la solución del sistema formado por las ecuaciones de r y r' nos da su punto de intersección, que también pertenece a la recta s y nos permite calcular el parámetro b.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv ax - 4y + 4 = 0 \\ r' \equiv 2x - y + 1 = 0 \end{array}\right\} : r \perp s \Leftrightarrow a \cdot 2 + (-4) \cdot 1 = 0 \ : \ 2a - 4 = 0 \ : \ a = 2$$

Conocido a se calcula el punto de intersección de r y r' (A).

$$A \equiv \begin{cases} 2x - 4y + 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \text{ Resolviendo por cualquier método: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A\ (0,\ 1)$$

El punto A también pertenece a $s \equiv 3x + by = 10$.

$$A(0,1) \in s \equiv 3x + by = 10 \Leftrightarrow 3 \cdot 0 + b \cdot 1 = 10 \ : \ b = 10$$

28. Las rectas $r \equiv ax - y - 4 = 0$ y $r' \equiv x - y + b = 0$ son perpendiculares y cortan al eje OX en dos puntos que distan 5 unidades. Hallar a y b.

Solución.

Si las rectas son perpendiculares, y teniendo en cuenta que están expresadas en forma general, sus coeficientes deben cumplir:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv ax - y - 4 = 0 \\ r' \equiv x - y + b = 0 \end{array}\right\} : a \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 0 \ : \ a + 1 = 0 \ : \ a = -1$$

Para calcular "b" conocido "a" se tiene en cuenta el segundo dato, la distancia entre los puntos de corte de ambas rectas con el eje OX es de 5 unidades.

$$\text{Punto de corte de r con OX: } \begin{cases} r \equiv -x - y - 4 = 0 \\ OX \equiv y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases} : P(-4, 0)$$

$$\text{Punto de corte de r' con OX: } \begin{cases} r' \equiv x - y + b = 0 \\ OX \equiv y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -b \\ y = 0 \end{cases} : Q(-b, 0)$$

$$d(P - Q) = \sqrt{(-4 - (-b))^2 + (0 - 0)^2} = |b - 4| = 5$$

El valor absoluto es debido a que las distancias son siempre positivas. Para quitar el valor absoluto habrá que tener en cuenta que su argumento puede ser positivo o negativo.

$$\pm(b - 4) = 0 : \begin{cases} (+) : b - 4 = 5 \to 9 \\ (-) : -(b - 4) = 0 \to b = -1 \end{cases}$$

Las dos posibilidades que hay que cumplan las condiciones propuestas son:

$$\begin{cases} r \equiv -x - y - 4 = 0 \\ r' \equiv x - y + 9 = 0 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} r \equiv -x - y - 4 = 0 \\ r' \equiv x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

29. Hallar m y n para que las rectas nx + y + 5 = 0, y = mx − 3 sean paralelas y la 1ª pase por el punto A(3,-2).

Solución.

Teniendo en cuenta las expresiones que tienen las rectas, lo más sencillo es expresar las rectas en forma explícita, y buscar la relación de perpendicular entre las pendientes de ambas rectas.

"Si dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales"

$$\begin{cases} r \equiv y = -nx - 5 \\ r' \equiv y = mx - 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Paralelas} \Leftrightarrow -n = m$$

Si la 1ª pasa por A(3, −2), sus coordenadas cumplen su ecuación.

$$y = -nx - 5 \xrightarrow{A(3,-2)} -2 = -n \cdot 3 - 5 \ : \ n = 1$$

Con el valor calculado de n y la condición de paralelismo se calcula m.

$$\begin{cases} n = 1 \\ -n = m \end{cases} : m = -1$$

30. Hallar m y n sabiendo que mx +2y =6, nx +y =9 son paralelas y la segunda pasa por el punto del eje OX que dista 3 unidades positivas del origen.

Solución.

Si dos rectas son paralelas, los coeficientes de A_i y B_i de las ecuaciones generales deben ser proporcionales entre ellos y no proporcionales a los términos independientes (C_i).

$$\begin{cases} mx + 2y - 6 = 0 \\ nx + y - 9 = 0 \end{cases} : \xrightarrow{\text{PARALELAS}} \frac{m}{n} = \frac{2}{1} \neq \frac{-6}{-9} \ : \ \frac{m}{n} = 2 \ : \ m - 2n = 0$$

La segunda recta corta al eje OX en el punto (3, 0), ya que según dice el enunciado lo corta a tres unidades positivas del origen de ordenadas, por lo tanto el punto (3, 0) pertenece a la recta y sus coordenadas deben cumplir su ecuación.

$$nx + y - 9 = 0 \xrightarrow{(3,0)} 3n - 0 + 9 = 0 \ : \ n = 3$$

Sustituyendo el valor en la condición de paralelismo se calcula m.

$$m - 2n = 0 \xrightarrow{n=3} m - 3 \cdot 2 = 0 \ : \ m = 6$$

31. Dada la recta $r \equiv \dfrac{x - m}{m + 1} = \dfrac{y + 3}{2}$, hallar m para que:

a) Sea paralela a $s \equiv x = 2y - 3$
b) Forme 135º con OX
c) Sea vertical
d) Pase por (1,1)
e) Su ordenada en el origen valga −7

Solución.

a. Para que sean paralelas, sus vectores de dirección deben ser proporcionales.

$$r \equiv \frac{x - m}{m + 1} = \frac{y + 3}{2} : \vec{d}_r = (m + 1, 2)$$

$$s \equiv x - 2y + 3 = 0 : \vec{d}_s = (-(-2), 1) = (2, 1)$$

$$\vec{d}_r = k \cdot \vec{d}_s \ : \ (m + 1, 2) = k \cdot (2, 1) \ ; \ \frac{m + 1}{2} = \frac{2}{1} \ : \ m = 3$$

b. La pendiente de una recta es el valor de tangente del ángulo que forma la recta con el eje OX.

$$m = \text{tag}\, 135^{\circ} = -1$$

La pendiente de una recta por otro lado, también se puede definir en función de las componentes del vector de dirección de la recta, si el vector de dirección es $\vec{d} = (u_1, u_2)$, su pendiente es:

$$m = -\frac{u_2}{u_1}$$

Aplicando a la recta r: $\dfrac{x-m}{m+1}=\dfrac{y+3}{2}: \vec{d}_r=(m+1,2)\ ;\ \ pte=-\dfrac{m+1}{2}$

Igualando:

$$-1=-\frac{m+1}{2}\ :\ m=1$$

c. Si una recta es vertical, la primera componente del vector de dirección debe ser nula (su vector debe ser proporcional al vector $\vec{j}=(0,1)$).

$$\frac{x-m}{m+1}=\frac{y+3}{2}: \vec{d}_r=(m+1,2)\ ;\ \ m+1=0\ :\ m=-1$$

d. Si una recta pasa por un punto, las coordenadas del punto satisfacen la ecuación de la recta.

$$r\equiv\frac{x-m}{m+1}=\frac{y+3}{2}\xrightarrow{(1,1)\in r}\frac{1-m}{m+1}=\frac{1+3}{2}\ :\ \frac{1-m}{m+1}=2\ :\ 1-m=2m+2\ ;\ 3m=-1\ :\ m=\frac{-1}{3}$$

e. Si la ordenada en el origen es −7, la recta corta al eje OY en el punto (0, −7) y por tanto sus coordenadas satisfacen la ecuación de la recta.

$$r\equiv\frac{x-m}{m+1}=\frac{y+3}{2}\xrightarrow{(0,-7)\in r}\frac{0-m}{m+1}=\frac{-7+3}{2}\ :\ \frac{-m}{m+1}=-2\ :\ -m=-2m-2\ :\ m=-2$$

32. Si A(1,3), B(3,5) y C(5,2) son vértices de un triángulo. Hallar la mediana de vértice A.

Solución.

Las medianas de un triángulo son las rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. Para el triángulo ABC, la mediana de vértice A es la recta que pasa por A y por M, punto medio de BC.

Mediana de A: $\begin{cases} A(1,3) \\ M=\left(\dfrac{b_1+c_1}{2},\dfrac{b_2+c_2}{2}\right)=\left(\dfrac{3+5}{2},\dfrac{5+2}{2}\right)=\left(4,\dfrac{7}{2}\right)\end{cases}$

Conocidos dos puntos de una recta, su ecuación se obtiene con uno de los punto (A) y usando como vector de dirección el segmento formado entre los puntos $\left(\overline{AM}\right)$

$$\begin{cases} A(1,3) \\ \overline{AM}=\left(4-1,\dfrac{7}{2}-3\right)=\left(3,\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$

La forma más rápida de obtener la ecuación de la recta conocido un punto y su vector de dirección es expresarla en forma continua.

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1/2}$$

Lo normal sería expresarla en forma general o explícita.

$$x-6y+17=0$$

33. Determinar la ecuación de la recta que forma con OX un ángulo de 30º y pasa por el punto (−2,−3).

Solución.

Los datos que nos dan permiten expresar la ecuación de la recta en forma punto pendiente.

$$y-a_1=m\cdot(x-a_2)$$

Donde (a_1,a_2) son las coordenadas del punto y m es la pendiente, que por definición es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje OX.

$$m=tag30^{o}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$r : y-(-2)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-(-3))$$

Ordenando

$$r : y+2=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+3)\ ;\quad \sqrt{3}x-3y+3\sqrt{3}-6=0$$

34. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1,0) y corta al eje OY formando con el un ángulo de 30º.

Solución.

Igual que el anterior pero teniendo en cuenta que el ángulo que dan es el que forma con OY, y por tanto el forma con OX será su complementario (60º)

$$m=\operatorname{tag}60^\circ=\sqrt{3}$$

$$r : y-0=\sqrt{3}(x-(-1))\ ,\quad y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$$

35. Ecuaciones de la paralela y de la perpendicular por el punto P=(3,-1) a cada una de las rectas:

a) $\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=3-5\lambda \end{cases}$

b) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}$

c) $3x-4y+7=0$

d) $y=3x-4$

e) $y-3=-2\cdot(x+2)$

f) $x=1$

g) $y=-3$

Solución.

El calculo de la paralela o perpendicular a una recta que pase por un punto, viene determinado por la expresión que haya utilizado para la ecuación de la recta.

Las condiciones que deben cumplir en cada caso son:

- PARALELA
  1. Vectores de dirección iguales o proporcionales.
  2. Igual pendiente
  3. Coeficientes de x e y de la ecuación general proporcionales (Haz Paralelo $Ax+By+k=0$)

- PERPENDICULAR
  1. Producto escalar de sus vectores de dirección es cero. $\left(\vec{v}=(v_1,v_2)\rightarrow\vec{v}'=(-v_2,v_1)\right)$
  2. Sus pendientes son inversas y opuestas
  3. Haz perpendicular: $Bx-Ay+k=0$.

Nota: Con la notación $\vec{v}'$ representamos el vector perpendicular a $\vec{v}$.

a. $r\equiv\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=3-5\lambda \end{cases} : \begin{cases} A(1,3) \\ \vec{d}_r=(2,-5) \end{cases}$

- Paralela: $s\equiv\begin{cases} P(3,-1) \\ \vec{d}_r=(2,-5) \end{cases} : s\equiv\equiv\begin{cases} x=3+2\mu \\ y=-1-5\mu \end{cases} : \forall\mu\in R$

- Perpendicular: $s' : \begin{cases} P(3,-1) \\ \vec{d}_{s'}\perp d_r(2,-5)\Rightarrow\vec{d}_{s'}=(5,2) \end{cases} : \begin{cases} x=3+5\sigma \\ y=-1+2\sigma \end{cases}$

b. $r\equiv\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4} : \begin{cases} P(1,-2) \\ d_r=(3,4) \end{cases}$

- Paralela: $s\equiv\begin{cases} P(3,-1) \\ \vec{d}_s=\vec{d}_r=(3,4) \end{cases} : \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{x+2}{4}$

- Perpendicular: $s' \equiv \begin{cases} P(3,-1) \\ \vec{d}_s \perp \vec{d}_r(3,4) \Rightarrow \vec{d}_s = (-4,3) \end{cases} : s' \equiv \dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y+1}{3}$

c. $r \equiv 3x - 4y + 7 = 0$

- Paralela: Haz paralelo: $3x - 4y + k = 0$. $P(3,-1) \in s$: $3 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) + k = 0$; $k = -13$

$$s \equiv 3x - 4y - 13 = 0$$

- Perpendicular: Haz perpendicular: $4x + 3y + k' = 0$. $P(3,-1) \in s'$: $4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + k' = 0$; $k' = -9$

$$s' \equiv 3x - 4y - 9 = 0$$

d. $r \equiv y = 3\,x - 4$: $\begin{cases} m(\text{pte}) = 4 \\ \text{Ordenada en el origen } (0,-4) \end{cases}$

- Paralela: $s \equiv \begin{cases} P(3,-1) \\ m_s = m_r = 4 \end{cases} : y = 4x + n \xrightarrow{P(3,-1) \in s} -1 = 4 \cdot 3 + n$; $n = -13$

$$s \equiv y = 4x - 13$$

- Perpendicular: $s' \equiv \begin{cases} P(3,-1) \\ m_s = \dfrac{-1}{m_r} = \dfrac{-1}{4} \end{cases} : y = \dfrac{-x}{4} + n' \xrightarrow{P(3,-1) \in s} -1 = \dfrac{-3}{4} + n'$; $n' = \dfrac{7}{4}$

$$s' \equiv y = -\frac{x}{4} + \frac{7}{4}$$

e. $r \equiv y - 3 = -2 \cdot (x + 2)$: $\begin{cases} A(-2,3) \\ m_r(\text{pte}) = -2 \end{cases}$

- Paralela: $s \equiv \begin{cases} P(3,-1) \\ m_s = m_r = -2 \end{cases} : y + 1 = -2 \cdot (x - 3)$
- Perpendicular: $s' \equiv \begin{cases} P(3,-1) \\ m'_s = \dfrac{-1}{m_r} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} : y + 1 = \dfrac{1}{2}(x - 3)$

f. $x = 1$ Recta vertical.

- Paralela por $P(3,-1)$: $s \equiv x = 3$
- Perpendicular por $P(3,-1)$: $s' \equiv y = -1$

g. $y = -3$ Recta horizontal.

- Paralela por $P(3,-1)$: $s \equiv y = -1$
- Perpendicular por $P(3,-1)$: $s' \equiv x = 3$

36. Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(-2,3)$ y es paralela a $y = 2x + 2$.

Solución.

Por ser paralela tendrá igual pendiente y por tanto su ecuación será de la forma:

$$y = 2x + n$$

El valor de n se determinada teniendo en cuenta que el punto P pertenece a la recta buscada, y por tanto sus coordenadas cumplen la ecuación de la recta.

$$3 = 2 \cdot (-2) + n : \; n = 7$$

$$y = 2x + 7$$

37. Halla el punto de intersección de la recta $y - 2x - 2 = 0$ con su perpendicular trazada por $P(-2,3)$.

Solución.

Primero se calcula la perpendicular a recta por el punto P, y a continuación el punto de corte de ambas rectas.

La perpendicular a: $-2x + y - 2 = 0$, tendrá la forma: $x + 2y + K = 0$, $\forall K \in \mathbb{R}$.

El parámetro K se obtiene teniendo en cuenta que el punto P(−2, 3) pertenece a la perpendicular.

$$-2+2\cdot 3+K=0\ ;\ K=-4$$

La recta perpendicular a $-2x+y-2=0$ que pasa por P tiene la expresión:

$$x+2y-4=0$$

El punto de corte de las dos rectas se obtiene resolviendo el sistema que forman las ecuaciones de ambas rectas.

$$P':\begin{cases}-2x+y-2=0\\ x+2y-4=0\end{cases}\ :\ \begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}\Rightarrow P'(0,2)$$

38. Halla las coordenadas de P', simétrico de P(1,−2) respecto de A(3,4).

Solución.

Si P' es el simétrico de P respecto de A será porque A es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

Las coordenadas del punto medio (A) del segmento $\overline{PP'}$ son:

$$A:\begin{cases}x_a=\dfrac{x_P+x_{P'}}{2}\\ y_a=\dfrac{y_P+y_{P'}}{2}\end{cases}:\begin{cases}3=\dfrac{2+x_{P'}}{2}:x_{P'}=4\\ 4=\dfrac{-1+y_{P'}}{2}:y_{P'}=9\end{cases}\Rightarrow P'(4,9)$$

39. Halla las coordenadas de P', simétrico de P(1,−2) respecto de la recta $y=\frac{3}{4}x$.

Solución.

El simétrico de un punto respecto de una recta se transforma en simétrico de un punto respecto otro punto (M), siendo M, el punto de corte de la recta con su perpendicular que pasa por P.

La perpendicular a $r\equiv y=\frac{3}{4}x$ tendrá la forma: $y=-\frac{4}{3}x+n$, teniendo en cuenta que por ser perpendiculares, sus pendientes serán inversas y opuestas. El valor del parámetro n se obtiene teniendo en cuenta que la recta buscada pasa por el punto P(1, −2).

$$-2=-\frac{4}{3}\cdot 1+n\ :\ n=-\frac{2}{3}$$

La recta s, perpendicular a r que pasa por P tiene por ecuación:

$$s'\equiv y=-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$$

El punto M, punto medio del segmento $\overline{PP'}$ se obtiene resolviendo el sistema formado por las recta r y s.

$$\begin{cases}y=\dfrac{3}{4}x\\ y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow M:\begin{cases}x_m=-\dfrac{8}{25}\\ y_m=-\dfrac{6}{25}\end{cases}$$

Teniendo en cuenta que Mes el punto medio de $\overline{PP'}$, se calculan las coordenadas de P'.

$$M:\begin{cases}x_m=\dfrac{x_P+x_{P'}}{2}\\ y_m=\dfrac{y_P+y_{P'}}{2}\end{cases}:\begin{cases}-\dfrac{8}{25}=\dfrac{1+x_{P'}}{2}:x_{P'}=-\dfrac{41}{25}\\ -\dfrac{6}{25}=\dfrac{-2+y_{P'}}{2}:y_{P'}=\dfrac{38}{25}\end{cases}\Rightarrow P'\left(-\frac{41}{25},\frac{38}{25}\right)$$

40. Halla la ecuación de una recta que pasa por $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ y limita con los ejes coordenados una superficie de área 15.

Solución.

Este tipo de problema es el típico que se resuelve con la ecuación de la recta en forma canónica.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Siendo (a, 0) el punto de corte de la recta con el eje OX y (0, b) el punto de corte con OY, pero además, a es la longitud de la base del triángulo y b es la longitud de la altura, por tanto:

$$\text{Área} = \frac{a \cdot b}{2} \ : \ \frac{a \cdot b}{2} = 15 \ : \ a \cdot b = 30$$

Para poder obtener un sistema y calcular los valores de a y b, se tiene en cuenta que el punto $P\left(3, \frac{5}{2}\right)$, pertenece a la recta y por tanto sus coordenadas satisfacen la ecuación de la recta.

$$\frac{3}{a} + \frac{5/2}{b} = 1 \ : \ \frac{3}{a} + \frac{5}{2b} = 1$$

El problema se acaba resolviendo el sistema: $\begin{cases} a \cdot b = 30 \\ \frac{3}{a} + \frac{5}{2b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 5 \end{cases}$

La recta buscada es: $\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$ o también : $5x + 6y - 30 = 0$.

41. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2 = 5t \\ y = -2t \end{cases} : s \equiv x + ay = 0 : t \equiv y = bx + 3$$

Hallar los valores de a y b para que r sea perpendicular a s y a t.

Solución.

Para que dos rectas sean perpendiculares, el producto escalar de sus vectores de dirección debe ser nulo.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -2t \end{cases} : \bar{d}_r = (5, -2)$$

$$s \equiv x + ay = 0 : \bar{d}_s = (-a, 1)$$

$$t \equiv y = bx + 3 : \bar{d}_t = (1, b)$$

$$r \perp s \Rightarrow \bar{d}_r \circ \bar{d}_s = 0 \Rightarrow (5, -2) \circ (-a, 1) = 0 \ : \ -5a - 2 = 0 \ : \ a = -\frac{2}{5}$$

$$r \perp t \Rightarrow \bar{d}_r \circ \bar{d}_t = 0 \Rightarrow (5, -2) \circ (1, b) = 0 \ : \ 5 \cdot 1 - 2b = 0 \ : \ b = \frac{5}{2}$$

42. Calcula a y b para que las rectas $2x + 3y - b = 0$, y $6x - ay - 1 = 0$, son perpendiculares y que la primera pasa por el punto A(1, 0).

Solución.

Por estar en forma general, para que sean perpendiculares se debe cumplir:

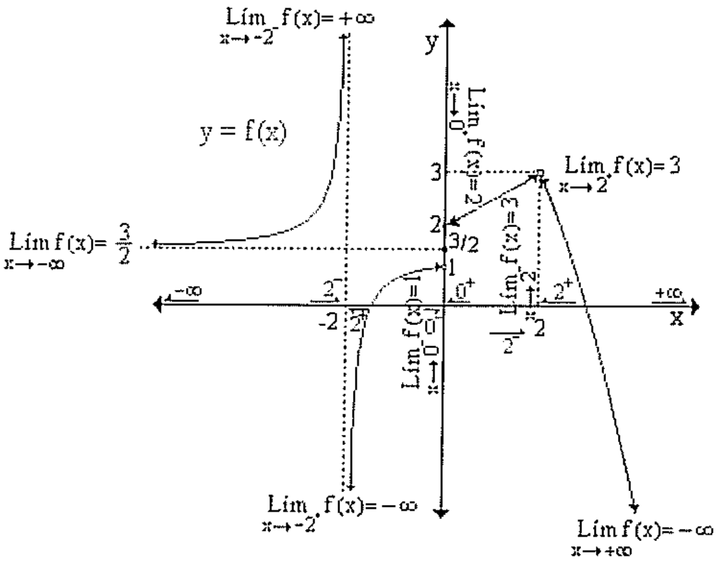
$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

$$2 \cdot 6 + 3 \cdot (-a) = 0 \ : \ 12 - 3a = 0 \ : \ a = 4$$

Si la primera pasa por el punto A(1, 0):

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - b = 0 \ ; \ 2 - b = 0 \ : \ b = 2$$

1. Para resolver un límite con ayuda de la gráfica de la función hay que fijarse hacia donde tienden las imágenes de la función (los valores de y) cuando los valores de x se aproximan hacia el punto donde quiere calcularse el límite.



a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$

h) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$

La condición para que una función tenga límite en un punto es que en ese punto existan sus límites laterales y además coincidan.

i) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \nexists$ Porque $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

j) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ Porque $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$

k) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \nexists$ Porque $\lim\limits_{x\to -0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -0^+} f(x)$

2. Calcula el límite de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x+1)^3(3x+2)^2}{x(x^2+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = ?$ La indeterminación se resuelve ordenando los polinomios y simplificando todos los términos por x^5 (monomio de mayor grado del denominador)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1)^3(3x+2)^2}{x(x^2+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(8x^3+12x^2+6x+1)\cdot(9x^2+12x+4)}{x(x^4+2x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{72x^5+204x^4+230x^3+129x^2+36x+4}{x^5+2x^3+x} \underset{\div x^5}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{72+\frac{204}{x}+\frac{230}{x^2}+\frac{129}{x^3}+\frac{36}{x^4}+\frac{4}{x^5}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}} =$$

$$= \frac{72+\frac{204}{\infty}+\frac{230}{\infty^2}+\frac{129}{\infty^3}+\frac{36}{\infty^4}+\frac{4}{\infty^5}}{1+\frac{2}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^4}} = \frac{72+0+0+0+0+0}{1+0+0} = 72$$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^3}{x^2+1}\right) = \infty-\infty = ?$ Se restan las fracciones algebraicas y se transforma en $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^3}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x^2+1)-x^3(x+1)}{(x+1)\cdot(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2-x^4-x^3}{x^3+x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^3}{x^3+x^2+x+1} = \frac{\infty}{\infty} = ?$$

Se dividen todos los términos por x^3 (monomio de mayor grado del denominador).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^3}{x^3+x^2+x+1} \overset{\div x^3}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{\frac{1}{\infty}-1}{1+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}} = \frac{0-1}{1+0+0+0} = -1$$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = ?$ Se dividen todos los términos por x (monomio de mayor grado del denominador). $\left(\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3} < x\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+\sqrt[3]{x^2}} \overset{\div x}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{x}}} = \frac{2-\frac{1}{\infty}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{\infty}}} = \frac{2-0}{1+\sqrt[3]{0}} = 2$$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5}-x+5\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5}-(x-5)\right) = \infty-\infty = ?$ Se multiplica y divide por el conjugado de la expresión irracional, buscando en el numerador la expresión notable suma × diferencia.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5}-(x-5)\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5}-(x-5)\right)\left(\sqrt{x^2-5}+(x-5)\right)}{\left(\sqrt{x^2-5}+(x-5)\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5}\right)^2-(x-5)^2}{\sqrt{x^2-5}+(x-5)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5-(x^2-10x+25)}{\sqrt{x^2-5}+(x-5)} = \lim_{x\to\infty}\frac{10x-30}{\sqrt{x^2-5}+x-5} \underset{\div x}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{10-\frac{30}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-5}}{x}+1-\frac{5}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{10-\frac{30}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-5}{x^2}}+1-\frac{5}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{10-\frac{30}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}+1-\frac{5}{x}} = \frac{10-\frac{30}{\infty}}{\sqrt{1-\frac{5}{\infty^2}}+1-\frac{5}{\infty}} = \frac{10-0}{\sqrt{1-0}+1-0} = \frac{10}{2} = 5$$

e) $\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2(x^2+1)}-x^2\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2}-x^2\right) = \infty-\infty = ?$

Se multiplica y divide por el conjugado de la expresión irracional, buscando en el numerador la expresión notable suma × diferencia.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2}-x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+x^2}-x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^2}+x^2\right)}{\left(\sqrt{x^4+x^2}+x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+x^2}\right)^2-\left(x^2\right)^2}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2-x^4}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2}\underset{\div x^2}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x^2}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^4+x^2}{x^4}}+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty^2}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$

f) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x}\right)=\infty-\infty=?$ Se multiplica y divide por el conjugado de la expresión irracional, buscando en el numerador la expresión notable suma × diferencia.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\left(\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x-2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-2-\left(x^2-x\right)}{\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-2}{\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x}}\underset{\div x}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-3x-2}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-3x-2}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{-2-\frac{2}{\infty}}{\sqrt{1-\frac{3}{\infty}-\frac{2}{\infty^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}}=\frac{-2-0}{\sqrt{1-0-0}+\sqrt{1-0}}=\frac{-2}{2}=-1$$

g) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{x^2}=1^{\infty}=?$ La indeterminación se resuelve mediante el número e.

$$\operatorname{Lim}_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left\{\begin{matrix}\operatorname{Lim}_{x\to x_0} f(x)=1\\ \operatorname{Lim}_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\end{matrix}\right\}=e^{\operatorname{Lim}_{x\to x_0}\left(g(x)\cdot(f(x)-1)\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{x^2}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}-1\right)\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\left(\frac{x^3-1-1\cdot\left(x^3+1\right)}{x^3+1}\right)\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\left(\frac{x^3-1-x^3-1}{x^3+1}\right)\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\left(x^2\frac{-2}{x^3+1}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{x^3+1}}\underset{\div x^3}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{x}}{1+\frac{1}{x^3}}}=e^{\frac{\frac{-2}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty^3}}}=e^{\frac{0}{1+0}}=e^0=1$$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=1^{\infty}=?$ Indeterminación del número e.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}-1\right)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{x^2+x+1-1\cdot(x^2+1)}{x^2+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{x}{x^2+1}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}1}=e^1=e$$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{x^2+5}\right)^{2x-1}=1^{-\infty}=?$ Indeterminación del número e.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x^2+5}\right)^{2x-1}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left((2x-1)\left(\frac{x^2-2x}{x^2+5}-1\right)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left((2x-1)\frac{x^2-2x-1\cdot(x^2+5)}{x^2+5}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left((2x-1)\frac{-2x-6}{x^2+5}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x^2-10x+6}{x^2+5}}\underset{\div x^2}{=}e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4-\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}}}=e^{\frac{-4-\frac{10}{-\infty}+\frac{6}{(-\infty)^2}}{1+\frac{5}{(-\infty)^2}}}=e^{\frac{-4-0+0}{1+0}}e^{-4}$$

3. Calcula el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a menos infinito:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x-1\right)=-3(-\infty)^3=-3\cdot-\infty=+\infty$ Los límites de polinomios cuando la variable tiende a infinito solo dependen del monomio de mayor grado

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2}=1^{-\infty}=?$ Se resuelve con el número e.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-2)\left(\frac{2x+1}{2x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left((3x-2)\frac{1}{2x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{2x}}\underset{\div x}{=}e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{2}}=e^{\frac{3-\frac{2}{-\infty}}{2}}=$$

$$=e^{\frac{3+0}{2}}=e^{\frac{3}{2}}$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2}=\infty-\infty=?$ Se multiplica y divide por el conjugado de la expresión irracional, buscando en el numerador la expresión notable suma × diferencia.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}}\underset{\div x}{\overset{\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}=$$

$$=\frac{2-\frac{2}{-\infty}}{\sqrt{1+\frac{2}{-\infty}}+\sqrt{1-\frac{2}{(-\infty)^2}}}=\frac{2+0}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{2}=1$$

4. Calcula el límite cuando $x\to\pm\infty$ de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{3x^2}{x-3}\right)=\infty-\infty=?$ Se restan las fracciones algebraicas y se transforma en $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{3x^2}{x-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\cdot(x-3)-3x^2\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^4-3x^3-3x^2}{x^3-3x^2+x-3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\div x^3}{=}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-3-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{-2\cdot\infty-3-\frac{3}{\infty}}{1-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}-\frac{3}{\infty^3}}=\frac{-\infty-3-0}{1-0+0-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{3x^2}{x-3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\cdot(x-3)-3x^2\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^4-3x^3-3x^2}{x^3-3x^2+x-3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\div x^3}{=}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-3-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{-2\cdot(-\infty)-3-\frac{3}{-\infty}}{1-\frac{3}{-\infty}+\frac{1}{(-\infty)^2}-\frac{3}{(-\infty)^3}}=\frac{\infty-3+0}{1+0+0+0}=+\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5^x}{4^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x=\left(\frac{5}{4}\right)^\infty=\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5^x}{4^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x=\left(\frac{5}{4}\right)^{-\infty}=0$

c) $$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2x}}{x^2-\sqrt{2x}}}=\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+\sqrt{2x}}{x^2-\sqrt{2x}}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\div x^2}{=}}=\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{2x}}{x^2}}{1-\frac{\sqrt{2x}}{x^2}}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{\frac{2x}{x^4}}}{1-\sqrt{\frac{2x}{x^4}}}}=$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\sqrt{\frac{2}{x^3}}}{1-\sqrt{\frac{2}{x^3}}}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{2}{(\pm\infty)^3}}}{1-\sqrt{\frac{2}{(\pm\infty)^3}}}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{0}}{1-\sqrt{0}}}=1$$

5. Calcula m con la condición:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2-4}=6$$

Solución.

Se calcula el límite en función del parámetro (m), y se iguala con el valor del límite.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2mx^2+(2-3m)x+3}{x^2-4}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\div x^2}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-2m+\frac{(2-3m)}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=$$

$$=\frac{-2m+\frac{(2-3m)}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}}{1-\frac{4}{\infty^2}}=\frac{-2m+0+0}{1-0}=-2m$$

$$-2m=6:m=\frac{6}{-2}=-3$$

6. Dada $f(x)=\frac{2x^2-6x-8}{x^2-4x}$, calcula su límite:

a) Cuando x tiende a 1
b) Cuando x tiende a 0
c) Cuando x tiende a 4

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-6x-8}{x^2-4x}=\frac{2\cdot 1^2-6\cdot 1-8}{1^2-4\cdot 1}=\frac{-12}{-3}=4$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2-6x-8}{x^2-4x}=\frac{2\cdot 0^2-6\cdot 0-8}{0^2-4\cdot 0}=\frac{-8}{0}=-\infty$. Si al sustituir x por el valor al que tiende queda la expresión $\frac{k}{0}$, se estudian los límites laterales.

Mi consejo para calcular los límites laterales es factorizar el denominador, y solo sustituir x por los valores laterales en la x del factor del denominador que se este anulando.

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x^2-6x-8}{(x-4)x}=\frac{2\cdot 0^2-6\cdot 0-8}{(0-4)\cdot 0^-}=\frac{-8}{-4\cdot 0^-}=\frac{-8}{0^+}-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x^2-6x-8}{(x-4)x}=\frac{2\cdot 0^2-6\cdot 0-8}{(0-4)\cdot 0^+}=\frac{-8}{-4\cdot 0^+}=\frac{-8}{0^-}+\infty$

Conclusión: Como lo límites laterales son distintos, no existe límite cuando x tiende a cero

c) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-6x-8}{x^2-4x}=\frac{2\cdot 4^2-6\cdot 4-8}{4^2-4\cdot 4}=\frac{0}{0}=?$. La indeterminación se resuelve descomponiendo numerador y denominador factorialmente, y eliminando el factor común. La descomposición se puede hacer por el método de Ruffini, mediante el empleo de expresiones notables o en el caso de polinomios de segundo grado o bicuadradas por su método. Mi consejo es hacerlo por Ruffini, dividiendo siempre por el valor al que tiende la variable.

$2x^2-6x-8=0$

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -6 & -8 \\ 4 & & 8 & 8 \\ \hline & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-6x-8}{x^2-4x}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+2)\cdot(x-4)}{x\cdot(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+2)}{x}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$2x^2-6x-8=(2x+2)(x-4)$

7. Calcula el límite de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-4}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+(2+x)^2}{1+x}$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8}$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2+4x+2}$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{(x-3)\cdot(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{4}{-1}=-4$

b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x-3}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-4}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x^2+2x+1)}{(x+2)\cdot(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+1}{x+2}=\frac{9}{4}$

d) $\lim_{x\to -1}\frac{x+(2+x)^2}{1+x}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x+4}{1+x}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+4)}{1+x}=\lim_{x\to -1}(x+4)=-1+4=3$

e) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8}=\frac{0}{0}=?$. Se descomponen los polinomios por Rufini

$x^3+6x^2+12x+8$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 12 & 8 \\ -2 & & -2 & -8 & -8 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

x^3-2x^2-4x+8

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -4 & 8 \\ -2 & & -2 & 8 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+6x^2+12x+8=(x+2)(x^2+4x+4)$ $\quad x^3-2x^2-4x+8=(x+2)(x^2-4x+4)$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\cdot(x^2+4x+4)}{(x+2)\cdot(x^2-4x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}=\frac{(-2)^2+4(-2)+4}{(-2)^2-4(-2)+4}=\frac{0}{16}=0$$

f) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2+4x+2}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\cdot(x^2-2x+4)}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{x+2}=\frac{12}{0}=\infty$ Al quedar la expresión $\frac{k}{0}$, se estudian los límites laterales, para saber si existe límite.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-2x+4}{x+2}=\frac{(-2)^2-2(-2)+4}{-2^-+2}=\frac{12}{0^-}=-\infty \\ \lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-2x+4}{x+2}=\frac{(-2)^2-2(-2)+4}{-2^++2}=\frac{12}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}:\ \lim_{x\to -2^-}f(x)\neq\lim_{x\to -2^+}f(x)\Rightarrow \text{No}\ \exists \lim_{x\to -2}f(x)$$

8. Dada $f(x)=\frac{x^2+mx-6}{3x-9}$ calcula m para que tenga límite finito cuando x tiende a 3. ¿Cuanto vale entonces el límite?

Solución.

Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+mx-6}{3x-9}=\frac{3+3m}{0}$$

Para que el límite sea finito, el numerador debería dar cero, generándose una indeterminación que al resolverse deberá dar finito. En caso contrario, si el denominador quedará distinto de cero, el límite sería infinito.

$$3+3m=0:m=-1$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{3x-9}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)\cdot(x-3)}{3\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{3}=\frac{5}{3}$$

9. Calcula los siguientes límites:

Solución.

a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2+3}{x-1}\right)=\frac{1}{0}-\frac{4}{0}=\infty-\infty=?$ La indeterminación se resuelve restando las fracciones algebraicas, se obtiene $\frac{k}{0}$ y se estudian los límites laterales.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2+3}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-\left(x^2+3\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-x^2+x-2}{x-1}=\frac{-2}{0}=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-1^2+1-2}{1^--1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-1^2+1-2}{1^+-1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\end{array}\right\}:\text{No}\ \exists\ \lim_{x\to 1}\frac{-x^2+x-2}{x-1}$$

b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{1-x^3}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=?$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{1-x^3}\right)=\left\{\begin{array}{c}x^2-1=(x-1)(x+1)\\ -x^3+1=-(x-1)\left(x^2+x+1\right)\end{array}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{1\cdot\left(-\left(x^2+x+1\right)\right)-1\cdot(x+1)}{-(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-x^2-2x-2}{-(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+2}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{5}{0}=\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1^2+2\cdot 1+2}{\left(1^--1\right)(1+1)\left(1^2+1+1\right)}=\frac{5}{0^-\cdot 2\cdot 3}=\frac{5}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1^2+2\cdot 1+2}{\left(1^+-1\right)(1+1)\left(1^2+1+1\right)}=\frac{5}{0^+\cdot 2\cdot 3}=\frac{5}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}:\text{No existe límite}$$

c) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{2}{8-x^3}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=?$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{2}{8-x^3}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{2}{(2-x)\left(x^2+2x+4\right)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+2}{(2-x)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{10}{0}=\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2+2x+2}{(2-x)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{2^2+2\cdot 2+2}{\left(2-2^-\right)\left(2^2+2\cdot 2+4\right)}=\frac{10}{0^+\cdot 12}=\frac{10}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2+2x+2}{(2-x)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{2^2+2\cdot 2+2}{\left(2-2^+\right)\left(2^2+2\cdot 2+4\right)}=\frac{10}{0^-\cdot 12}=\frac{10}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}:\text{No existe límite}$$

d) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-4x+3}\right)=\frac{4}{0}-\frac{6}{0}=?$ Se restan las fracciones y se simplifica el factor común $(x-3)$.

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+5}{(x-1)\cdot(x-3)}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)(x-1)-(x+5)}{(x-1)\cdot(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{(x-1)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)\cdot(x-3)}{(x-1)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x-1}=\frac{5}{2}$$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5+x}-\frac{1}{5}}{x}=\frac{\frac{1}{5+0}-\frac{1}{5}}{0}=\frac{0}{0}=?$ Se ordena la expresión algebraica y se elimina el factor común.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5+x}-\frac{1}{5}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1\cdot 5-1\cdot(5+x)}{(5+x)\cdot 5}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{(5+x)\cdot 5\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(5+x)\cdot 5}=\frac{-1}{(5+0)\cdot 5}=\frac{-1}{25}$$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{(-2)^2-4}-\frac{1}{-2+2}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$. La indeterminación se resuelve restando las fracciones algebraicas, se obtiene $\frac{k}{0}$ y se estudian los límites laterales.

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{(x+2)\cdot(x-2)}-\frac{1}{x+2}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{1-1\cdot(x-2)}{(x+2)\cdot(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{3-x}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{5}{0}=\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{3-x}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{3-(-2)}{(-2^-+2)\cdot(-2-2)}=\frac{5}{0^-\cdot(-4)}=\frac{5}{0^+}=\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\frac{3-x}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{3-(-2)}{(-2^++2)\cdot(-2-2)}=\frac{5}{0^+\cdot(-4)}=\frac{5}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}:\text{No }\exists\ \lim_{x\to -2}\frac{3-x}{(x+2)\cdot(x-2)}$$

g) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt{x}-\sqrt{8}}=\frac{8-8}{\sqrt{8}-\sqrt{8}}=\frac{0}{0}=?$. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado de la expresión irracional $\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)$, buscando la expresión notable suma por diferencia que nos permita eliminar raíces y obtener un factor común en numerador y denominador $(x-8)$, que al simplificarlo elimine la indeterminación.

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt{x}-\sqrt{8}}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)}{x-8}=$$
$$=\lim_{x\to 8}\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)=\sqrt{8}+\sqrt{8}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=\frac{2^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{0}{0}=?$. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado de la expresión irracional $\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)$, buscando la expresión notable suma por diferencia que nos permita eliminar raíces y obtener el factor común $(x-2)$ en el denominar. En el numerador, el factor $(x-2)$ se obtiene factorizando el polinomio. Simplificarlo el factor común se elimina la indeterminación.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-2^2\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{-(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{-1}=$$
$$=\frac{(2+2)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}{-1}=-8\sqrt{2}$$

i) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-x-3}{x+2-\sqrt{2x+3}}=\frac{\sqrt{-1+5}-(-1)-3}{-1+2-\sqrt{2\cdot(-1)+3}}=\frac{0}{0}=?$. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado de las dos expresiones irracionales buscando la expresión notable suma por diferencia que nos permita eliminar raíces y obtener el factor común $(x-2)$. Para calcular el conjugado es conveniente separar la parte irracional del resto mediante paréntesis, teniendo en cuenta que si la parte polinómica va como sustraendo (restando), los términos del polinomio cambiaran de signo, debido al signo negativo que precederá al paréntesis.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-x-3}{x+2-\sqrt{2x+3}}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-(x+3)}{(x+2)-\sqrt{2x+3}}=$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\left(\sqrt{x+5}-(x+3)\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{\left((x+2)-\sqrt{2x+3}\right)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\left(\left(\sqrt{x+5}\right)^2-(x+3)^2\right)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{\left((x+2)^2-\left(\sqrt{2x+3}\right)^2\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{\left(-x^2-5x-4\right)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{\left(x^2+2x+1\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{-(x+4)\cdot(x+1)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{(x+1)^2\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{-(x+4)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{(x+1)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} = \frac{-6}{0} = -\infty$$

Se estudian los límites laterales

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{-(x+4)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{(x+1)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} = \frac{-(-1+4)\cdot\left(-1+2+\sqrt{2(-1)+3}\right)}{\left(-1^-+1\right)\cdot\left(\sqrt{-1+5}+(-1)+3\right)} = \frac{-6}{0^-\cdot 4} = \frac{-6}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{-(x+4)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{(x+1)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} = \frac{-(-1+4)\cdot\left(-1+2+\sqrt{2(-1)+3}\right)}{\left(-1^++1\right)\cdot\left(\sqrt{-1+5}+(-1)+3\right)} = \frac{-6}{0^+\cdot 4} = \frac{-6}{0^+} = -\infty$$

No existe límite en $x = -1$.

j) $\lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9} = \frac{1-\sqrt{3-2}}{3^2-9} = \frac{0}{0} = ?$. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado de la expresión irracional $\left(1+\sqrt{x-2}\right)$, buscando la expresión notable suma por diferencia que nos permita eliminar raíces y obtener el factor común $(x-2)$ en el numerador. En el denominador, el factor $(x-2)$ se obtiene factorizando el polinomio. Simplificarlo el factor común se elimina la indeterminación.

$$\lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{\left(1-\sqrt{x-2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{1^2-\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1-(x-2)}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x+3)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)} = \frac{-1}{(3+3)\cdot\left(1+\sqrt{3-2}\right)} = \frac{-1}{12}$$

k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1} = \frac{\sqrt{1+0}-1}{\sqrt{1-0}-1} = \frac{0}{0} = ?$. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado de las dos expresiones irracionales buscando la expresión notable suma por diferencia que nos permita eliminar raíces y obtener el factor común x.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{\left(\sqrt{1-x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1-x}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1^2\right)\cdot\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{1-x}\right)^2-1^2\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x-1)\cdot\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{(1-x-1)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{-x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}+1}{-\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{\sqrt{1-0}+1}{-\left(\sqrt{1+0}+1\right)} = -1$$

l) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3} = \frac{\sqrt{2+2}-2}{\sqrt{2\cdot 2+5}-3} = \frac{0}{0} = ?$. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado de las dos expresiones irracionales buscando la expresión notable suma por diferencia que nos permita eliminar raíces y obtener el factor común $(x-2)$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)\cdot\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\cdot\left(\sqrt{2x+5}+3\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - 2^2\right)\cdot\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{\left(\left(\sqrt{2x+5}\right)^2 - 3^2\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2-4)\cdot\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(2x+5-9)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(2x-4)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

m) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+2} = \left(\frac{1-1}{1^2-1}\right)^{1+2} = \left(\frac{0}{0}\right)^3 = ?$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+2} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)\cdot(x+1)}\right)^{x+2} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{x+2} = \left(\frac{1}{1+1}\right)^{1+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

n) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{x+2/x} = (1+2\cdot 0)^{2/0} = 1^{\infty} = ?$. Se resuelve mediante el número e.

$$\operatorname*{Lím}_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = \left\{\begin{array}{l} \operatorname*{Lím}\limits_{x\to x_0} f(x) = 1 \\ \operatorname*{Lím}\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \end{array}\right\} \overset{1^{\pm\infty}}{=} e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to x_0}(g(x)\cdot(f(x)-1))}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{x+2/x} \overset{1^{\infty}}{=} e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x}\cdot(1+2x-1)\right)} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x}\cdot 2x\right)} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 0}(2(x+2))} = e^{2\cdot(0+2)} = e^4$$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+x^2\right)^{1/x} = \left(1+0+0^2\right)^{1/0} = 1^{\infty} = ?$. Se resuelve mediante el número e.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+x^2\right)^{1/x} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\left(1+x+x^2-1\right)\right)} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+x^2}{x}\right)} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)\,x}{x}\right)} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 0}(1+x)} = e^{1+0} = e$$

o) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{1/x-1} = \left(\frac{1+1}{3\cdot 1-1}\right)^{1/1-1} = 1^{\infty} = ?$. Se resuelve mediante el número e.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{1/x-1} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{x+1}{3x-1}-1\right)\right)} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{2-2x}{3x-1}\right)} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 1}\frac{-2\cdot(x-1)}{(x-1)(3x-1)}} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 1}\frac{-2}{3x-1}} = e^{-2/2} = e^{-1}$$

p) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)^{1/x-1} = \left(\frac{1^2+1+1}{1+2}\right)^{1/1-1} = 1^{\infty} = ?$. Se resuelve mediante el número e.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)^{1/x-1} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}-1\right)\right)} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{x+2}\right)} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}} = e^{\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x+2)}} = e^{2/3}$$

q) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)^{1/x-2} = \left(\frac{1}{4-2^2}\right)^{1/2-2} = \left(\frac{1}{0}\right)^{1/0} = \infty^{\infty} = \infty$

10. Sean: $f(x)=\dfrac{3x-3}{5x+5}$ $g(x)=\dfrac{5x}{3x+2}$ $h(x)=\dfrac{x-2}{4x+1}$

calcular:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\cdot(g(x)-h(x))]$

b) $\lim\limits_{x\to -1/4}(g(x)\cdot h(x))$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(g(x)\cdot h(x))$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{3}f(x)$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\cdot(g(x)-h(x))]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{3x-3}{5x+5}\cdot\left(\dfrac{5x}{3x+2}-\dfrac{x-2}{4x+1}\right)\right]$ Se aplican las propiedades de los límites:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x-3}{5x+5}\cdot\left(\frac{5x}{3x+2}-\frac{x-2}{4x+1}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-3}{5x+5}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{3x+2}-\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{4x+1}\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-3}{5x+5}\underset{\div x}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-3/x}{5+5/x}=\dfrac{3-3/\infty}{5+5/\infty}=\dfrac{3-0}{5+0}=\dfrac{3}{5}\\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{3x+2}\underset{\div x}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{3+2/x}=\dfrac{5}{3+2/\infty}=\dfrac{5}{3+0}=\dfrac{5}{3}\\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{4x+1}\underset{\div x}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2/x}{4+1/x}=\dfrac{1-2/\infty}{4+1/\infty}=\dfrac{1-0}{4+0}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}=\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{17}{20}$$

b) $\lim\limits_{x\to -1/4}(g(x)\cdot h(x))=\lim\limits_{x\to -1/4}\dfrac{5x}{3x+2}\cdot\lim\limits_{x\to -1/4}\dfrac{x-2}{4x+1}=\dfrac{5\cdot\left(-1/4\right)}{3\left(-1/4\right)+2}\cdot\dfrac{\left(-1/4\right)-2}{4\left(-1/4\right)+1}=-1\cdot\dfrac{-9}{0}=-1\cdot-\infty=+\infty$

En este caso se pueden estudiar los límites laterales, teniendo en cuenta únicamente la $h(x)$.

$$\lim_{x\to -1/4^-}(g(x)\cdot h(x))=g\left(\frac{-1}{4}\right)\lim_{x\to -1/4^-}h(x)=-1\cdot\lim_{x\to -1/4^-}h(x)=-\lim_{x\to -1/4^-}h(x)=-\frac{-9}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1/4^+}(g(x)\cdot h(x))=g\left(\frac{-1}{4}\right)\lim_{x\to -1/4^+}h(x)=-1\cdot\lim_{x\to -1/4^+}h(x)=-\lim_{x\to -1/4^+}h(x)=-\frac{-9}{0^+}=+\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}[g(x)\cdot h(x)]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x}{3x+2}-\dfrac{x-2}{4x+1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x+2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{4x+1}=\dfrac{0}{2}-\dfrac{-2}{1}=2$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{3}f(x)=\dfrac{5}{3}\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{5}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-3}{5x+5}=\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{3}{5}=1$

11. Determinar el valor de "a" para que:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2-x}\right)^{\frac{a}{x-1}}=e^8$$

Solución.

El problema se resuelve calculando el límite en función de a, e igualando a e^8.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2-x}\right)^{\frac{a}{x-1}}=\left(\frac{1}{2-1}\right)^{\frac{a}{1-1}}=1^{\frac{a}{0}}=1^{\infty}$$

Se resuelve aplicando el número e.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2-x}\right)^{\frac{a}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{a}{x-1}\cdot\left(\frac{x}{2-x}-1\right)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{a}{x-1}\cdot\frac{2x-2}{2x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{2a\cdot(x-1)}{(x-1)(2x)}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{2a}{2-x}} = e^{2a}$$

Igualando:

$$e^{2a} = e^{8} \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

12,5

1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=R-\{0\}$

- Continuidad en x = 0:

- $f(0)=\dfrac{1}{0}=\infty\notin R$. No existe función en x = 0

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{0}:\left\{\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{matrix}\right\}:\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$

Discontinua no evitable de salto infinito.

b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=R-\{1,3\}$

- Continuidad en x = 1:

- $f(1)=\dfrac{1^2+2\cdot 1-3}{1^2-4\cdot 1+3}=\dfrac{0}{0}\notin R$. No existe función en x = 1

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x-3)\cdot(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{1+3}{1-3}=\dfrac{4}{-2}=-2$

Discontinua evitable. La función no existe en x = 1, pero tiene límite.

- Continuidad en x = 3:

- $f(3)=3\dfrac{3^2+2\cdot 3-3}{3^2-4\cdot 3+3}=\dfrac{12}{0}=\infty\notin R$

- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}=\dfrac{12}{0}:\left\{\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2+2x-3}{(x-1)\cdot(x-3)}=\dfrac{3^2+2\cdot 3-3}{(3-1)\cdot(3^--3)}=\dfrac{12}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2+2x-3}{(x-1)\cdot(x-3)}=\dfrac{3^2+2\cdot 3-3}{(3-1)\cdot(3^+-3)}=\dfrac{12}{0^+}=+\infty\end{matrix}\right\}:$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}\neq\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}$$

Discontinua no evitable de salto infinito.

c) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=R-\{2\}$

- Continuidad en x = 2:

- $f(2)=3\dfrac{2^2+3\cdot 2+2}{2^2-4\cdot 2+4}=\dfrac{0}{0}=\infty\notin R$

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4} \underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cdot(x-1)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{2-1}{2-2} = \dfrac{1}{0} = \infty$:

$$:\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{2-1}{2^- -2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{2-1}{2^+ -2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} : \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4} \neq \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4}$$

Discontinua no evitable de salto infinito.

d) $f(x)=\begin{cases} 9-x^2 & \text{Sí} \quad x\le 1 \\ x+1 & \text{Sí} \quad x>1 \end{cases}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=R$. Función definida por expresiones continuas. Se estudia la continuidad en x = 1 (Punto frontera).

- Continuidad en x = 1:

- $f(1)=9-1^2=8$. Existe función en x = 1

$$- \lim_{x\to 1} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(9-x^2\right) = 9-1^2 = 8 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x+1) = 1+1 = 2 \end{array}\right\} : \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

Discontinua no evitable de salto finito.

e) $f(x)=\begin{cases} 4-2x & \text{Sí} \quad x<0 \\ 2x+4 & \text{Sí} \quad x>0 \end{cases}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=R-\{0\}$. Función definida por expresiones continuas. Se estudia la continuidad en x = 0 (Punto frontera).

- Continuidad en x = 0:

- $f(0)=\nexists$. No existe función en x = 0

$$- \lim_{x\to 0} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(4-2x) = 4-2\cdot 0 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2x+4) = 2\cdot 0+4 = 4 \end{array}\right\} :$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 4$$

Discontinua evitable.

f) $g(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si} \quad x<-3 \\ 3x+1 & \text{si} \quad -3\le x<1 \\ 2x^2+2 & \quad\quad x>1 \end{cases}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=R-\{1\}$. Función definida por expresiones continuas. Se estudia la continuidad en x = −3, y en x = 1 (Puntos frontera).

- Continuidad en x = −3:

- $f(-3)=(-3)^2+2=11$. Existe función en $x=-3$

$$-\ \lim_{x\to -3} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}\left(x^2+2\right)=(-3)^2+2=11\\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^+}(3x+1)=3\cdot(-3)+1=-8\end{cases}:$$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x)\neq \lim_{x\to -3^+} f(x)\Rightarrow \nexists \lim_{x\to -3} f(x)$$

Discontinua no evitable de salto finito.

- Continuidad en x = 1:

- $f(1)=\nexists$. No existe función en $x=1$

$$-\ \lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3x+1)=3\cdot 1+1=4\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2x^2+2\right)=2\cdot 1^2+2=4\end{cases}:$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)=4$$

Discontinua evitable.

g) $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2} & \text{Si} \quad -2\le x<0\\ -\dfrac{1}{3}x+2 & \text{Si} \quad 0\le x<3\\ x-2 & \text{Si} \quad 3\le x<5\end{cases}$$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=[-2,5)$. Función definida por expresiones continuas en sus dominios de definición. Se estudia la continuidad en x = 0, y en x = 3 (Puntos frontera).

- Continuidad en x = 0:

- $f(0)=\dfrac{1}{3}\cdot 0+2=2$. Existe función en $x=0$

$$-\ \lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x+2}=\sqrt{0+2}=\sqrt{2}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{3}x+2\right)=-\dfrac{1}{3}\cdot 0+2=2\end{cases}:$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

Discontinua no evitable de salto finito.

- Continuidad en x = 3:

- $f(3)=3-2=1$. Existe función en $x=3$.

$$-\ \lim_{x\to 3} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(-\dfrac{1}{3}x+2\right)=-\dfrac{1}{3}\cdot 3+2=1\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-2)=3-2=1\end{cases}:$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 3} f(x)=1=f(1)$$

Continua.

h) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+2} & \text{Sí} \quad x<0\\ \dfrac{1}{x^2-1} & \text{Sí} \quad x\ge 0\end{cases}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=R-\{-2,1\}$. La continuidad se estudia en -2, 0 y 1.

- Continuidad en $x=-2$:

- $f(-2)=\dfrac{-2}{-2+2}=\dfrac{-2}{0}=\infty\notin R$

- $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{-2}{0}:\begin{cases}\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{-2}{-2^-+2}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{-2}{-2^++2}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty\end{cases}:$

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{x}{x+2}\neq\lim_{x\to-2^+}\frac{x}{x+2}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to-2}\frac{x}{x+2}$$

Discontinua no evitable de salto infinito.

- Continuidad en $x=0$:

- $f(0)=\dfrac{1}{0^2-1}=-1$. Existe función en $x=0$.

- $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{0}{0+2}=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^2-1}=-1\end{cases}:$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)\neq\lim_{x\to0^+}f(x)\Rightarrow\nexists\lim_{x\to0}f(x)$$

Discontinua no evitable de salto finito.

- Continuidad en $x=1$:

- $f(1)=\dfrac{1}{1^2-1}=\dfrac{1}{0}=\infty\notin R$

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{0}:\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{(x+1)\cdot(x-1)}=\dfrac{1}{(1+1)\cdot(1^--1)}=\dfrac{1}{2\cdot0^-}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{(x+1)\cdot(x-1)}=\dfrac{1}{(1+1)\cdot(1^+-1)}=\dfrac{1}{2\cdot0^+}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}:$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x}{x+2}\neq\lim_{x\to1^+}\frac{x}{x+2}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to1}\frac{x}{x+2}$$

Discontinua no evitable de salto infinito.

i) $f(x)=\left|x^2-9x+8\right|$

Solución.

Se transforma el valor absoluto a función por intervalos teniendo en cuenta el signo de la expresión.

$$x^2-9x+8=0:\begin{cases}x=1\\x=8\end{cases}$$
$$(-\infty,1)\cup(8,+\infty):f(x)>0$$
$$(1,8):f(x)<0$$

$$f(x)=\left|x^2-9x+8\right|=\begin{cases} x^2-9x+8 & \text{Si} \quad x\le 1 \\ -\left(x^2-9x+8\right) & \text{Si} \quad 1<x<8 \\ x^2-9x+8 & \text{Si} \quad x\ge 8 \end{cases}$$

Dominio: $D[f(x)]=R$. Función definida por expresiones continuas. Se estudia la continuidad en $x = 1$, y en $x = 8$ (Puntos frontera).

- Continuidad en $x = 1$:

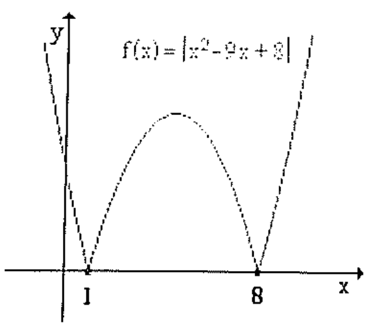
- $f(1)=1^2-9\cdot 1+8=0$. Existe función en $x = 1$.
- $$\lim_{x\to 1} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2-9x+8\right)=1^2-9\cdot 1+8=0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}-\left(x^2-9x+8\right)=-\left(1^2-9\cdot 1+8\right)=0 \end{array}\right\}:$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$$

Continua.

- Continuidad en $x = 8$:

- $f(8)=8^2-9\cdot 8+8=0$. Existe función en $x = 8$.
- $$\lim_{x\to 8} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 8^-} f(x)=\lim_{x\to 8^-}-\left(x^2-9x+8\right)=-\left(1^2-9\cdot 1+8\right)=0 \\ \lim_{x\to 8^+} f(x)=\lim_{x\to 8^+}\left(x^2-9x+8\right)=\left(1^2-9\cdot 1+8\right)=0 \end{array}\right\}:$$
$$\lim_{x\to 8^-} f(x)=\lim_{x\to 8^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 8} f(x)=0=f(8)$$

Continua.



En $x = 1$ y en $x = 8$ se forman lo que se denomina puntos vértices ó angulosos, en los cuales la función es continua pero no derivable

j) $f(x)=|x|+|x-1|$

Solución.

Una función con valores absolutos se transforma en una función por intervalos teniendo en cuenta los signos que toman las expresiones en valor absoluto. Si la expresión es positiva el valor absoluto no la modifica, si es negativa, el valor absoluto la transforma multiplicando por (-1).

El estudio del signo de las expresiones, se hace en función de los ceros de estas.

$x = 0$; $x - 1 = 0$: $x = 1$

$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$x<0 \Rightarrow \lvert x\rvert=-x$		$x>0 \Rightarrow \lvert x\rvert=x$		$x>0 \Rightarrow \lvert x\rvert=x$
$x-1<0 \Rightarrow \lvert x-1\rvert=-1\cdot(x-1)$		$x-1<0 \Rightarrow \lvert x-1\rvert=-1\cdot(x-1)$		$x-1>0 \Rightarrow \lvert x-1\rvert=x-1$

$$f(x)=\begin{cases} -1\cdot x+(-1)\cdot(x-1) & \text{Si} \quad x\le 0 \\ x+(-1)\cdot(x-1) & \text{Si} \quad 0<x<1 \\ x+(x-1) & \text{Si} \quad x\ge 1 \end{cases} : f(x)=\begin{cases} 1-2x & \text{Si} \quad x\le 0 \\ 1 & \text{Si} \quad 0<x<1 \\ 2x-1 & \text{Si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

Dominio: $D[f(x)]=R$. La función presenta puntos angulosos en 0 y en 1, siendo continua y no derivable en estos puntos.

- Continuidad en x = 0:

- $f(0)=1-2\cdot 0=1$. Existe función en x = 0.
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-2x)=1-2\cdot 0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1 \end{array}\right\}:$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$$

Continua.

- Continuidad en x = 1:

- $f(1)=2\cdot 1-1=1$. Existe función en x = 1.
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=:\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=(2x-1)=2\cdot 1-1=1 \end{array}\right\}:$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$$

Continua.

k) $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

Solución.

El valor absolut0 de x ($|x|$) se transforma en $-x$ si $x<0$, y en x si $x\ge 0$, obteniendo una función por intervalos.

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}=\begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{Si} \quad x<0 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{Si} \quad x\ge 0 \end{cases}$$

Dominio: $D[f(x)]=R$. Se estudia la continuidad en x = 0 (Puntos frontera).

- Continuidad en x = 0:

- $f(0)=\dfrac{0}{1+0}=0$. Existe función en x = 0.
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{0}{1-0}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{0}{1+0}=0 \end{array}\right\}:$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$$

Continua.

l) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{Si } x\neq 0\\ 1 \text{ Si } x=0\end{cases}$

Solución.
- Continuidad en x = 0:

- $f(0)=1$. Existe función en x = 0.

- $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \underset{\text{Conjugado}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{-2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{-2}{2}=-1$$

- $\lim_{x\to 0} f(x)=-1\neq f(0)=1$. Discontinua evitable.

m) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-8} & \text{Si } x\neq 2\\ 1/4 & \text{Si } x=2\end{cases}$

Solución.
- Continuidad en x = 2:

- $f(2)=\dfrac{1}{4}$. Existe función en x = 2.

- $$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8} \underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot\left(x^2+2x+4\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2+2x+4}=$$
$$=\frac{2+1}{2^2+2\cdot 2+4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

- $\lim_{x\to 2} f(x)=\dfrac{1}{4}=f(0)$. Continua.

2. Calcula el valor del parámetro a para que la función sea continua
$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax & \text{Si } x\leq 1\\ \operatorname{Ln} x & \text{Si } x>1\end{cases}$$
Solución.
El parámetro a se calcula aplicando la condición de continuidad en el punto frontera (x = 1).

Para que la función sea continua en x = 1 se debe cumplir:
$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$$

Para que exista límite en x = 1 deben existir los límites laterales y ser iguales.
$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$1^2 + a\cdot 1 = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2+ax\right) = \lim_{x\to 1^+} \operatorname{Ln} x$$
$$1^2 + a\cdot 1 = \operatorname{Ln} 1$$
$$1 + a = 0 : \quad a = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{Si} \quad x \le 1 \\ \operatorname{Ln} x & \text{Si} \quad x > 1 \end{cases}$$

3. Calcula los valores de a y b para que la función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{Si} \quad x < -1 \\ x^2 + ax + b & \text{Si} \quad -1 \le x \le 1 \\ x+1 & \text{Si} \quad x < 1 \end{cases}$$

Solución.

Los parámetros a y b se calculan aplicando la condición de continuidad en los puntos frontera ($x = -1$, $x = 1$), obteniendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que permite calcular los parámetros.

Para que la función sea continua en $x = -1$ se debe cumplir:

$$f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x)$$

Para que exista límite en $x = -1$ deben existir los límites laterales y ser iguales.

$$f(1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$$
$$(-1)^2 + a\cdot(-1) + b = \lim_{x\to -1^-}(x-1) = \lim_{x\to -1^+}\left(x^2+ax+b\right)$$
$$(-1)^2 + a\cdot(-1) + b = -1-1 : \quad -a + b = -3$$

Para que la función sea continua en $x = 1$ se debe cumplir:

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$$

Para que exista límite en $x = 1$ deben existir los límites laterales y ser iguales.

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$
$$1^2 + a\cdot 1 + b = \lim_{x\to -1^-}\left(x^2+ax+b\right) = \lim_{x\to -1^+}(x+1)$$
$$1^2 + a\cdot 1 + b = 1+1 \quad : \quad a + b = 1$$

Las condiciones de continuidad permiten plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -a + b = -3 \\ a + b = 1 \end{cases} : \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{Si} \quad x < -1 \\ x^2 + 2x - 1 & \text{Si} \quad -1 \le x \le 1 \\ x+1 & \text{Si} \quad x < 1 \end{cases}$$

4. Calcula el valor del parámetro a para que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{Si} \quad x \le a \\ x+3 & \text{Si} \quad x > a \end{cases}$$

Solución.

La condición de continuidad en el punto frontera (x = a), permite obtener una igualdad donde despejar el valor de a.

Para que la función sea continua en x = a se debe cumplir:

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$$

Para que exista límite en x = a deben existir los límites laterales y ser iguales.

$$f(a)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$$

$$a^2+1=\lim_{x\to a^-}\left(x^2+1\right)=\lim_{x\to a^+}(x+3)$$

$$a^2+1=a+3 \;:\; a^2-a-2=0:\begin{cases} a=-1 \\ a=2 \end{cases}$$

Existen dos posibilidades:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{Si} \quad x \le -1 \\ x+3 & \text{Si} \quad x > -1 \end{cases} \quad \text{ó} \quad f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{Si} \quad x \le 2 \\ x+3 & \text{Si} \quad x > 2 \end{cases}$$

5. Calcula el valor de k para que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x^2-1} & \text{Si} \quad x \ne 1 \\ K & \text{Si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Solución.

Para que la función sea continua en x = 0 se debe cumplir:

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$$

$$K=\lim_{x\to 1}\frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x^2-1} \underset{\substack{\text{Conjugado}\\ \text{y}\\ \text{Rufini}}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\left(2x-\sqrt{x^2+3}\right)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x)^2-\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-\left(x^2+3\right)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x^2-1\right)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3}{2x+\sqrt{x^2+3}}=\frac{3}{2\cdot 1+\sqrt{1^2+3}}=\frac{3}{4}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x^2-1} & \text{Si} \quad x \ne 1 \\ \dfrac{3}{4} & \text{Si} \quad x = 1 \end{cases}$$

13 S

2. $f(x)=\dfrac{4x-2}{x^2-2x}$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/0$.

$$D[f(x)]=R-\{0,2\}$$

$$x=0:\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-2}{x^2-2x}=\frac{4\cdot 0-2}{0^2-2\cdot 0}=\frac{-2}{0}\ \textbf{Asíntota vertical.}$$

Posición relativa. Se estudian los límites laterales en x = 0.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4x-2}{x\cdot(x-2)}=\frac{4\cdot 0-2}{0^-\cdot(0-2)}=\frac{-2}{0^-\cdot(-2)}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{4x-2}{x\cdot(x-2)}=\frac{4\cdot 0-2}{0^+\cdot(0-2)}=\frac{-2}{0^+\cdot(-2)}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

$$x=2:\ \lim_{x\to 2}\frac{4x-2}{x^2-2x}=\frac{4\cdot 2-2}{2^2-2\cdot 2}=\frac{6}{0}\ \textbf{Asíntota vertical.}$$

Posición relativa. Se estudian los límites laterales en x = 2.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{4x-2}{x\cdot(x-2)}=\frac{4\cdot 2-2}{2\cdot(2^--2)}=\frac{6}{2\cdot 0^-}=\frac{6}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-2}{x\cdot(x-2)}=\frac{4\cdot 2-2}{2\cdot(2^+-2)}=\frac{6}{2\cdot 0^+}=\frac{6}{0^+}=+\infty$$

- **Horizontales:** y = L:

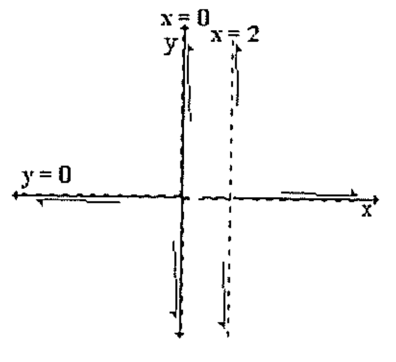
$$L=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x-2}{x^2-2x}\underset{\div x^2}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\frac{4}{\pm\infty}-\frac{2}{(\pm\infty)^2}}{1-\frac{2}{\pm\infty}}=\frac{0-0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

Asíntota horizontal y = 0.

Posición relativa:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-L)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x-2}{x^2-2x}-0\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x-2}{x^2-2x}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x}$$

- $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x}=\dfrac{4}{-\infty}=0^-$: La función se aproxima a la asíntota por debajo.
- $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=\dfrac{4}{+\infty}=0^+$: La función se aproxima a la asíntota por encima.



- **Oblicuas:** Por tener asíntotas horizontales hacia $\pm\infty$, no tiene oblicua.

3. $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/0$.

$$D[f(x)]=R-\{1\}$$

$$x=1:\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x-1}=\frac{1^3}{1-1}=\frac{1}{0}\ \textbf{Asíntota vertical.}$$

<u>Posición relativa</u>. Se estudian los límites laterales en x = 1.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x-1} = \frac{1^3}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x-1} = \frac{1^3}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

- **Horizontales:** y = L:

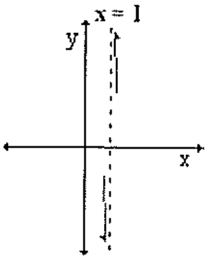
$$L = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x-1} \underset{\div x}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1-\frac{1}{x}} = \frac{(\pm\infty)^2}{1-\frac{1}{\pm\infty}} = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty$$

La función no tiene asíntotas horizontales

- **Oblicuas:** y = mx + n

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-x} \underset{\div x^2}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\pm\infty}{1-\frac{1}{\pm\infty}} = \frac{\pm\infty}{1-0} = \pm\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua



4. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/0$.

$$D[f(x)] = R - \{0\}$$

$$x = 0:\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x} = \frac{0^2-1}{0} = \frac{1}{0}\ \textbf{Asíntota vertical.}$$

<u>Posición relativa</u>. Se estudian los límites laterales en x = 0.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x} = \frac{0^2-1}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = \frac{0^2-1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

- **Horizontales:** y = L:

$$L = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x} \underset{\div x}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{1} = \frac{\pm\infty-\frac{1}{\pm\infty}}{1} = \frac{\pm\infty-0}{1} = \pm\infty$$

La función no tiene asíntotas horizontales

- **Oblicuas:** y = mx + n

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2} \underset{\div x^2}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1} = \frac{1-\frac{1}{(\pm\infty)^2}}{1} = \frac{1+0}{1} = 1$$

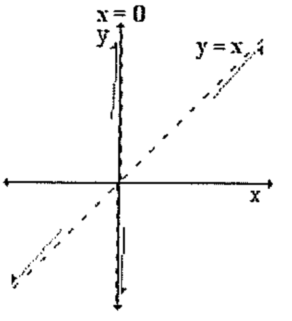
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{x} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1-x\cdot x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{\pm\infty} = 0$$

Asíntota oblicua: y = x

Posición relativa.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(mx+n)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1-x\cdot x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{x}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{-\infty}=0^+$ La función se aproxima a la asíntota por encima.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{+\infty}=0^-$ La función se aproxima a la asíntota por debajo.



Otra forma:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -1 & x \\ -x^2 & & x \\ \hline \cancel{} & -1 & \end{array}\qquad y=x$$

5. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-3}$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/0$.

$$D[f(x)]=R-\{3\}$$

$$x=3:\ \lim_{x\to3}\frac{x^2+1}{x-3}=\frac{3^2+1}{0}=\frac{10}{0}\ \text{Asíntota vertical.}$$

Posición relativa. Se estudian los límites laterales en x = 3.

$$\lim_{x\to3^-}\frac{x^2+1}{x-3}=\frac{3^2+1}{3^--3}=\frac{10}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to3^+}\frac{x^2+1}{x-3}=\frac{3^2+1}{3^+-3}=\frac{10}{0^+}=+\infty$$

- **Horizontales:** y = L:

$$L=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x-3}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}=\frac{\pm\infty+\frac{1}{\pm\infty}}{1-\frac{3}{\pm\infty}}=\frac{\pm\infty+0}{1-0}=\pm\infty$$

La función no tiene asíntotas horizontales

- **Oblicuas:** y = mx + n

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x-3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-3x}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x^2}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=\frac{1+\frac{1}{(\pm\infty)^2}}{1-\frac{3}{\pm\infty}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-3}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x\cdot(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+1}{x-3}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x}{=}}$$

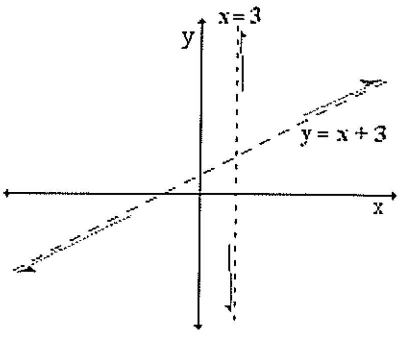
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}=\frac{3+\frac{1}{\pm\infty}}{1-\frac{3}{\pm\infty}}=\frac{3+0}{1-0}=3$$

Asíntota oblicua: y = x + 3

Posición relativa.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(mx+n))=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-3}-(x+3)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1-(x-3)\cdot(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{x-3}$$

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{8}{x-3}=\frac{8}{-\infty-3}=0^-$ La función se aproxima a la asíntota por debajo.
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x-3}=\frac{8}{+\infty-3}=0^+$ La función se aproxima a la asíntota por encima.



Otra forma:

$$\begin{array}{rl|l} x^2 & +1 & x-3 \\ \hline -x^2+3x & & x+3 \\ \hline / \;\; 3x & +1 & \\ -3x & +9 & \\ \hline & / \;\; 10 & \end{array}$$

$y=x+3$

6. $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/0$.

$$D[f(x)]=R$$

La función no tiene asíntotas verticales.

- **Horizontales:** $y = L$:

$$L=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3}{x^2+1}\underset{\div x^2}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\frac{2+\frac{3}{(\pm\infty)^2}}{1+\frac{2}{(\pm\infty)^2}}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

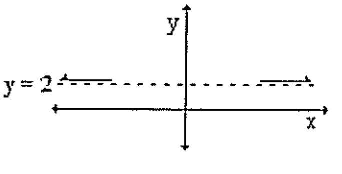
Asíntota horizontal y = 2.

Posición relativa.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-L)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+3}{x^2+1}-2\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3-2\cdot(x^2+1)}{x^2+1}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+1}$$

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{(-\infty)^2+1}=\frac{1}{+\infty}=0^+$: La función se aproxima a la asíntota por encima.
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{(+\infty)^2+1}=\frac{1}{+\infty}=0^+$: La función se aproxima a la asíntota por encima.

- **Oblicuas:** Por tener asíntotas horizontales hacia $\pm\infty$, no tiene oblicua.



7. $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-4}$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/_0$.

$$D[f(x)]=R-\{\pm 2\}$$

$$\mathbf{x=-2:}\ \lim_{x\to -2}\frac{4x}{x^2-4}=\frac{4\cdot(-2)}{(-2)^2-4}=\frac{-8}{0}\ \textbf{Asíntota vertical.}$$

Posición relativa. Se estudian los límites laterales en x = 0.

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{4x}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{4\cdot(-2)}{(-2^-+2)\cdot(-2-2)}=\frac{-8}{0^-\cdot(-4)}=\frac{-8}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{4x}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{4\cdot(-2)}{(-2^++2)\cdot(-2-2)}=\frac{-8}{0^+\cdot(-4)}=\frac{-8}{0^-}=+\infty$$

$$\mathbf{x=2:}\ \lim_{x\to 2}\frac{4x}{x^2-4}=\frac{4\cdot 2}{2^2-4}=\frac{8}{0}\ \textbf{Asíntota vertical.}$$

Posición relativa. Se estudian los límites laterales en x = 2.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{4x}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{4\cdot 2}{(2+2)\cdot(2^--2)}=\frac{8}{4\cdot 0^-}=\frac{8}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{4x}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{4\cdot 2}{(2+2)\cdot(2^+-2)}=\frac{8}{4\cdot 0^+}=\frac{8}{0^+}=+\infty$$

- **Horizontales:** y = L:

$$L=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x^2-4}\underset{\div x^2}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\frac{4}{\pm\infty}}{1-\frac{4}{(\pm\infty)^2}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

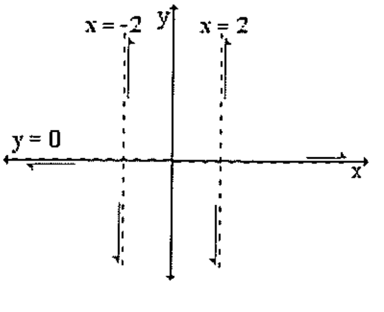
Asíntota horizontal y = 0.

Posición relativa.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-L)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x}{x^2-4}-0\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x^2-4}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x}=\dfrac{4}{-\infty}=0^-$: La función se aproxima a la asíntota por debajo.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=\dfrac{4}{+\infty}=0^+$: La función se aproxima a la asíntota por encima.

- **Oblicuas:** Por tener asíntotas horizontales hacia ± ∞, no tiene oblicua.



8. $f(x)=\dfrac{x^2-5}{2x-4}$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/_0$.

$$D[f(x)]=R-\{2\}$$

$$x=2:\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5}{2x-4}=\frac{2^2-5}{2\cdot 2-4}=\frac{-1}{0}\ \textbf{Asíntota vertical.}$$

Posición relativa. Se estudian los límites laterales en x = 2.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-5}{2\cdot(x-2)}=\frac{2^2-5}{2\cdot(2^- -2)}=\frac{-1}{2\cdot 0^-}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-5}{2\cdot(x-2)}=\frac{2^2-5}{2\cdot(2^+ -2)}=\frac{-1}{2\cdot 0^+}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

- **Horizontales:** y = L:

$$L=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5}{2x-4}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-\frac{5}{x}}{2-\frac{4}{x}}=\frac{\pm\infty-\frac{5}{\pm\infty}}{2-\frac{4}{\pm\infty}}=\frac{\pm\infty-0}{2-0}=\pm\infty$$

La función no tiene asíntotas horizontales

- **Oblicuas:** y = mx + n

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2-5}{2x-4}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5}{2x^2-4x}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x^2}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{5}{x^2}}{2-\frac{4}{x}}=\frac{1-\frac{5}{(\pm\infty)^2}}{3-\frac{4}{\pm\infty}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-5}{2x-4}-\frac{1}{2}\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+5-x\cdot(x-2)}{2\cdot(x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+5}{2\cdot(x-2)}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x}{=}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{2\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{2+\frac{5}{\pm\infty}}{2\cdot\left(1-\frac{2}{\pm\infty}\right)}=\frac{2+0}{2\cdot(1-0)}=\frac{2}{2}=1$$

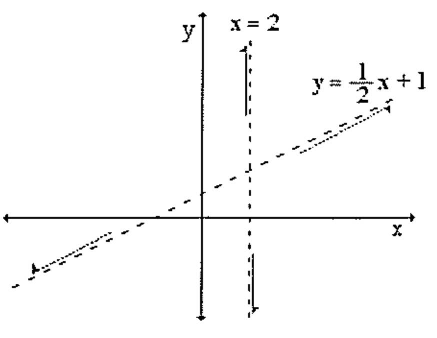
Asíntota oblicua: $\mathbf{y=\frac{1}{2}x+1}$

Posición relativa.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(mx+n))=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-5}{2x-4}-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-5}{2\cdot(x-2)}-\frac{x+2}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5-(x+2)\cdot(x-2)}{2\cdot(x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{2\cdot(x-2)}$$

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{2\cdot(x-2)}=\frac{-1}{2\cdot(-\infty-2)}=\frac{-1}{-\infty}=0^+$ La función se aproxima a la asíntota por encima.
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2\cdot(x-2)}=\frac{-1}{2\cdot(\infty-2)}=\frac{-1}{\infty}=0^-$ La función se aproxima a la asíntota por debajo.



Otra forma:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -5 & 2x-4 \\ \hline -x^2+2x & & \frac{1}{2}x+1 \\ 2x-5 & & \\ \underline{2x+4} & & y=\frac{1}{2}x+1 \\ -1 & & \end{array}$$

9. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x}$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/0$.

$$D[f(x)]=R-\{0,-1\}$$

$$\textbf{x = -1: } \lim_{x\to -1}\frac{x^2}{x^2+x}=\frac{(-1)^2}{(-1)^2+(-1)}=\frac{1}{0}\ \textbf{Asíntota vertical.}$$

<u>Posición relativa</u>. Se estudian los límites laterales en x = 2.

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2}{x\cdot(x+1)}=\frac{(-1)^2}{-1\cdot\left(-1^-+1\right)}=\frac{1}{-1\cdot 0^-}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2}{x\cdot(x+1)}=\frac{(-1)^2}{-1\cdot\left(-1^++1\right)}=\frac{1}{-1\cdot 0^+}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\textbf{x = 0: } \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x}\ \underset{\text{Factorizar}}{\overset{0/0}{=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

En x = 0, la función presenta una discontinuidad evitable. No hay asíntota vertical.

- **Horizontales:** y = L:

$$L=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+x}\ \underset{\div x^2}{\overset{\infty/\infty}{=}}\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\pm\infty}}=\frac{1}{1\pm 0}=1$$

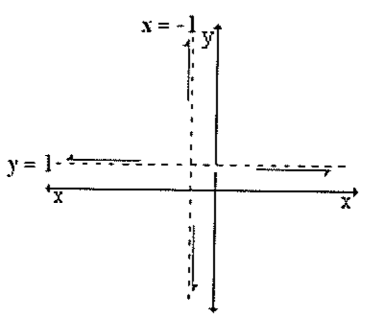
Asíntota horizontal y = 1.

<u>Posición relativa</u>.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-L)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x}-1\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x^2+x}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{x}$$

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{-\infty}=0^+$: La función se aproxima a la asíntota por encima.
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{+\infty}=0^-$: La función se aproxima a la asíntota por debajo.

- **Oblicuas:** Por tener asintotas horizontales hacia ± ∞, no tiene oblicua.



10. $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/0$.

$$D[f(x)]=R$$

La función no tiene asíntotas verticales.

- **Horizontales:** y = L:

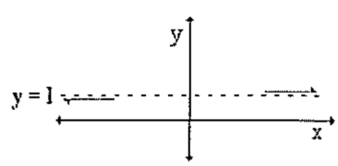
$$L=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\underset{\div x^2}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\frac{2}{\pm\infty}+\frac{1}{(\pm\infty)^2}}{1+\frac{1}{(\pm\infty)^2}}=\frac{1+0+0}{1+0}=1$$

Asíntota horizontal y = 2.

<u>Posición relativa.</u>

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-L)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x^2+1}-2\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+1-2\cdot(x^2+1)}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{x^2+1}$$

- $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x^2+1}=\dfrac{-1}{(-\infty)^2+1}=\dfrac{-1}{+\infty}=0^-$: La función se aproxima a la asíntota por debajo.
- $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x^2+1}=\dfrac{-1}{(+\infty)^2+1}=\dfrac{-1}{+\infty}=0^-$: La función se aproxima a la asíntota por debajo.



- **Oblicuas:** Por tener asíntotas horizontales hacia $\pm\infty$, no tiene oblicua.

11. $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-2)^2}$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/0$.

$$D[f(x)]=R-\{2\}$$

$$x=2:\ \lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{(x-2)^2}=\frac{3\cdot 2-1}{(2-2)^2}=\frac{5}{0}\ \textbf{Asíntota vertical.}$$

<u>Posición relativa</u>. Se estudian los límites laterales en x = 2.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3x-1}{(x-2)^2}=\frac{3\cdot 2-1}{(2^--2)^2}=\frac{5}{(0^-)^2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-1}{(x-2)^2}=\frac{3\cdot 2-1}{(2^+-2)^2}=\frac{5}{(0^+)^2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

- **Horizontales:** y = L:

$$L=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-1}{(x-2)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-1}{x^2-4x+4}\underset{\div x^2}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{\frac{3}{\pm\infty}-\frac{1}{(\pm\infty)^2}}{1-\frac{4}{\pm\infty}+\frac{4}{(\pm\infty)^2}}=\frac{0-0}{1-0+0}=0$$

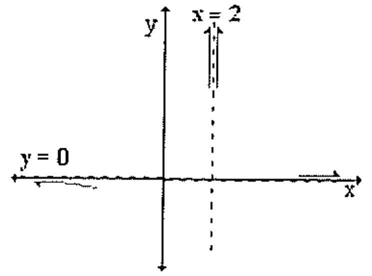
Asíntota horizontal y = 0.

Posición relativa.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-L)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x-1}{(x-2)^2}-0\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-1}{x^2-4x+4}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=\frac{3}{-\infty}=0^-$: La función se aproxima a la asíntota por debajo.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=\frac{3}{+\infty}=0^+$: La función se aproxima a la asíntota por encima.

- **Oblicuas:** Por tener asíntotas horizontales hacia $\pm\infty$, no tiene oblicua.



12. $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/_0$.

$$D[f(x)]=R$$

La función no tiene asíntotas verticales.

- **Horizontales:** $y = L$:

$$L=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\sqrt{(-\infty)^2+1}-(-\infty)=\infty+\infty=\infty$$

Hacia $-\infty$ la función no tiene asíntota horizontal.

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\underset{\text{Conjugado}}{\overset{\infty-\infty}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{\infty^2-1}+\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

Hacia ∞ la función tiene asíntota horizontal $y = 0$.

- **Oblicuas.** $y = mx + n$: Por tener asíntotas horizontales hacia $+\infty$, la función no tiene oblicua. Por no tener asíntota horizontal hacia $-\infty$ hay que estudiar la posibilidad de que tenga asíntota oblicua.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}\underset{\div x}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-1}{1}$$

El problema de este límite está en la expresión $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, cuando x tiende a $-\infty$ queda $\frac{\infty}{-\infty}$, siendo ambos infinitos de igual grado y de distinto signo, por lo tanto $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=-1$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - 1}{1} = \frac{-1-1}{1} = -2$$

Otra forma de resolver el límite es dividir por $-x$ $(x \to -\infty)$ en vez dividir por x.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} \overset{\infty/\infty}{\underset{\div x}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-x} - \frac{x}{-x}}{\frac{x}{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2+1}{(-x)^2}}+1}{-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+1}{-1} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}{-1} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{(-\infty)^2}}+1}{-1} = \frac{\sqrt{1+0}+1}{-1} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} \left(\left(\sqrt{x^2+1} - x \right) - (-2x) \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) \underset{\text{Conjugado}}{\overset{\infty-\infty}{=}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{(-\infty)^2+1}-(-\infty)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Asíntota oblicua hacia $-\infty$ $y = 2x$

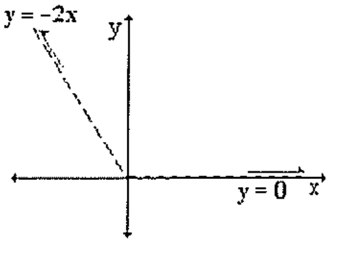
Posición relativa.

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx+n)) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x - (-2x) \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) \underset{\text{Conjugado}}{\overset{\infty-\infty}{=}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{(-\infty)^2+1}-(-\infty)} = \frac{1}{\infty} = 0^+$$

La función se aproxima a la asíntota por encima.



13. $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/0$.

$$D[f(x)]=R-\{\pm 1\}$$

$$x=-1:\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3}{1-x^2}=\frac{(-1)^3}{1-(-1)^2}=\frac{-1}{0}\ \text{Asíntota vertical.}$$

Posición relativa. Se estudian los límites laterales en x = 1.

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3}{(1+x)\cdot(1-x)}=\frac{(-1)^3}{\left(1+\left(-1^-\right)\right)\cdot(1-(-1))}=\frac{-1}{0^-\cdot 2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^3}{(1+x)\cdot(1-x)}=\frac{(-1)^3}{\left(1+\left(-1^+\right)\right)\cdot(1-(-1))}=\frac{-1}{0^+\cdot 2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$x=1:\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3}{1-x^2}=\frac{1^3}{1-1^2}=\frac{1}{0}\ \text{Asíntota vertical.}$$

Posición relativa. Se estudian los límites laterales en x = 2.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3}{(1+x)\cdot(1-x)}=\frac{1^3}{(1+1)\cdot\left(1-1^-\right)}=\frac{1}{2\cdot 0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3}{(1+x)\cdot(1-x)}=\frac{1^3}{(1+1)\cdot\left(1-1^+\right)}=\frac{1}{2\cdot 0^-}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

- **Horizontales:** y = L:

$$L=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{1-x^2}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x^2}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{(\pm\infty)^3}{\frac{1}{(\pm\infty)^2}-1}=\frac{\pm\infty}{0-1}=\pm\infty$$

La función no tiene asintotas horizontales

- **Oblicuas:** y = mx + n

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x-x^3}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x^3}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{1}{\frac{1}{(\pm\infty)^2}-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}-(-1)\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x^2}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1}=$$

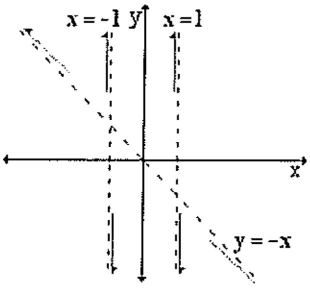
$$=\frac{\frac{1}{\pm\infty}}{\frac{1}{(\pm\infty)^2}-1}=\frac{0}{0-1}=0$$

Asíntota oblicua y = −x

Posición relativa.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(mx+n))=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{1-x^2}-(-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x-x^3}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{-x}$$

- $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{-(-\infty)} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+$: La función se aproxima a la asíntota por encima.
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0^-$: La función se aproxima a la asíntota por debajo.



14. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/0$.

$$D[f(x)] = R$$

La función no tiene asíntotas verticales.

- **Horizontales:** y = L:

$$L = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^x} = \begin{cases} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{-\infty}{e^{-\infty}} = \dfrac{-\infty}{0} = -\infty \\ = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{\infty/\infty}{=} \begin{Bmatrix} x \to +\infty \\ e^x >> x \end{Bmatrix} = 0 \end{cases}$$

Asíntota horizontal hacia $+\infty$ $y = 0$.

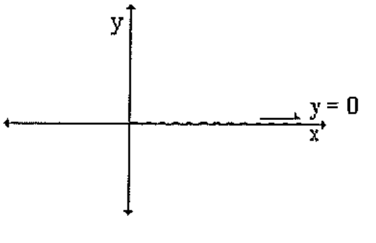
Posición relativa.

- $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - L) = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{e^x} - 0\right) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \begin{Bmatrix} e^x > 0 \\ x > 0 \end{Bmatrix} = 0^+$: La función se aproxima a la asíntota por encima.

- **Oblicuas:** y = mx + n. Por tener asíntotas horizontales hacia + ∞, la función no tiene oblicua. Por no tener asíntota horizontal hacia −∞ hay que estudiar la posibilidad de que tenga asíntota oblicua hacia −∞.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-\infty}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

La función no tiene oblicua hacia −∞.



15. $f(x)=e^{1-x^2}$

Solución.

- **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/_0$.

$$D[f(x)]=R$$

La función no tiene asíntotas verticales.

- **Horizontales:** y = L:

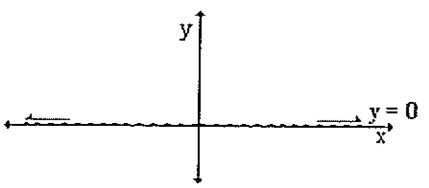
$$L=\lim_{x\to\pm\infty} e^{1-x^2}=e^{1-(\pm\infty)^2}=e^{-\infty}=0$$

Asíntota horizontal y = 0.

Posición relativa.

- $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-L)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{1-x^2}-0\right)=\lim_{x\to\pm\infty}e^{1-x^2}=e^{1-(\pm\infty)^2}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0^+$: La función se aproxima a la asíntota por encima.

- **Oblicuas:** Por tener asíntotas horizontales hacia $\pm\infty$, no tiene oblicua.



14. 5

3. Calcula las siguientes derivadas haciendo uso de las tablas y de las reglas principales:

i. $y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 8$

$$y' = 3\cdot 2x^{3-1} - 2\cdot 4x^{2-1} + 1\cdot 5x^{1-1} + 0: \quad \left(x^0 = 1\right) \qquad y' = 6x^2 - 8x + 5$$

ii. $y = \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{5}{x^2} + 3x - 7$

Lo primero es expresar los cocientes como exponentes negativos.

$$y = x^{-4} - 5x^{-2} + 3x - 7$$

$$y' = -4x^{-4-1} - (-2)\cdot 5x^{-2-1} + 1\cdot 3x^{1-1} + 0 = -4x^{-5} + 10x^{-3} + 3$$

Por último hay que devolverla a su forma racional

$$y' = \frac{-4}{x^5} + \frac{10}{x^{-3}} + 3$$

iii. $y = \sqrt[5]{x^2} + 4\sqrt[4]{x^3}$

Lo primero es expresar los radicales en forma de exponente fraccionario.

$$y = x^{2/5} + 4x^{3/4}$$

$$y' = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} + \frac{3}{4}\cdot 4x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} + 3x^{-\frac{1}{4}}$$

Por último hay que devolverla a su forma irracional

$$y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}}$$

iv. $y = 5(x-1)(2x^3-2)(x^2+3)$

Producto de tres funciones, se aplica la regla del producto extendida a tres funciones.

$$y' = 5\cdot\left[(x-1)'\left(2x^3-2\right)\left(x^2+3\right) + (x-1)\left(2x^3-2\right)'\left(x^2+3\right) + (x-1)\left(2x^3-2\right)\left(x^2+3\right)'\right] =$$

$$= 5\cdot\left[1\cdot\left(2x^3-2\right)\left(x^2+3\right) + (x-1)\cdot 6x^2\cdot\left(x^2+3\right) + (x-1)\left(2x^3-2\right)\cdot 2x\right]$$

En este caso no tiene sentido simplificar ya que si hubiéramos querido obtener la derivada simplificada, habríamos operado la función para obtener un polinomio, y a continuación habríamos derivado el polinomio

v. $y = 1 + \sqrt{1+x^2}$

En esta derivada, el segundo sumando es una función compuesta a la que habrá que aplicar la regla de la cadena $\left([f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)\right)$ siendo f la raíz cuadrad y g el polinomio.

$$y' = (1)' + \left(\sqrt{1+x^2}\right)'\cdot\left(1+x^2\right)' = 0 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(2x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

vi. $y = x^4 - \sqrt[4]{x^3 - x}$

NOTA: Las raíces de índice superior a 2 es más fácil derivarlas como exponente fraccionario, en cambio las cuadradas es más fácil derivarlas como raíz, aunque también se pueden derivar como exponente fraccionario. En general cada uno elegirá la opción que le parezca más sencilla.

$$y' = \left(x^4\right)' - \left(\left(x^3-x\right)^{1/4}\right)' = 4x^3 - \frac{1}{4}\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{4}-1}\cdot\left(3x^2-1\right) = 4x^3 - \frac{1}{4}\left(x^3-x\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(3x^2-1\right) =$$

$$= 4x^3 - \frac{3x^2-1}{4\left(x^3-x\right)^{3/4}} = 4x^3 - \frac{3x^2-1}{4\sqrt[4]{\left(x^3-x\right)^3}}$$

vii. $y = \dfrac{x^2-6x+2}{x+1}$

Aplicamos la regla del cociente.

$$y = \frac{\left(x^2-6x+2\right)' \cdot (x+1) - \left(x^2-6x+2\right)\cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(2x-6)\cdot (x+1) - \left(x^2-6x+2\right)\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2-6x+2x-6-\left(x^2-6x+2\right)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$$

viii. $y = \dfrac{x^3+1}{x}$

Aplicamos la regla del cociente.

$$y' = \frac{\left(x^3+1\right)' \cdot x - \left(x^3+1\right)\cdot (x)'}{(x)^2} = \frac{3x^2\cdot x - \left(x^3+1\right)\cdot 1}{x^2} = \frac{3x^3-x^3-1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$$

ix. $y = x^5 - 3x^4 + 7x - 12$

$$y' = 5x^4 - 12x^3 + 7$$

x. $y = \dfrac{x+6}{x^2-3x+5}$

Aplicamos la regla del cociente.

$$y' = \frac{(x+6)' \cdot \left(x^2-3x+5\right) - (x+6)\cdot \left(x^2-3x+5\right)'}{\left(x^2-3x+5\right)^2} = \frac{1\cdot \left(x^2-3x+5\right) - (x+6)\cdot (2x-3)}{\left(x^2-3x+5\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2-3x+5-\left(2x^2-3x+12x-18\right)}{\left(x^2-3x+5\right)^2} = \frac{-x^2-12x+23}{\left(x^2-3x+5\right)^2}$$

xi. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Aplicamos la regla del cociente.

$$y' = \frac{\left(x^2+1\right)' \cdot \left(x^2-1\right) - \left(x^2+1\right)\cdot \left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x\cdot \left(x^2-1\right) - \left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

$$= \frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

xii. $y = (2x^2+3x-1)^4$

Aplicamos la regla de la cadena

$$y' = 4\left(2x^2+3x-1\right)^3 \cdot (4x+3) = (16x+12)\left(2x^2+3x-1\right)^3$$

xiii. $y = \dfrac{x^3-1}{(x+1)^2}$

Aplicamos la regla del cociente y la de la cadena al binomio del denominador.

$$y' = \frac{\left(x^3-1\right)' \cdot (x+1)^2 - \left(x^3-1\right)\cdot \left((x+1)^2\right)'}{\left((x+1)^2\right)^2} = \frac{3x^2\cdot (x+1)^2 - \left(x^3-1\right)\cdot 2(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4} =$$

$$=\frac{(x+1)\cdot\left(3x^2\cdot(x+1)-\left(x^3-1\right)\cdot 2\right)}{(x+1)^4}=\frac{3x^2\cdot(x+1)-\left(x^3-1\right)\cdot 2}{(x+1)^3}=\frac{3x^3+3x^2-2x^3+2}{(x+1)^3}=\frac{x^3+3x^2+2}{(x+1)^3}$$

xiv. $y=7x^2-3x+\dfrac{12x-1}{x+3}$

Aplicamos las reglas de la suma y del cociente.

$$y'=14x-3+\frac{12\cdot(x+3)-(12x-1)\cdot 1}{(x+3)^2}=14x-3+\frac{12x+36-12x+1}{(x+3)^2}=14x-3+\frac{37}{(x+3)^2}$$

xv. $y=x\cdot\sqrt{x^2+1}$

Aplicamos la regla del producto, y la de la cadena a la raíz.

$$y'=1\cdot\sqrt{x^2+1}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2+1}+x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2+x^2}{\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

xvi. $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x-3}}$

Aplicamos la regla del cociente, y la de la cadena a la raíz de denominador.

$$y'=\frac{2\cdot\sqrt{x-3}-(2x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}\cdot 1}{\left(\sqrt{x-3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{x-3}-\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x-3}}}{x-3}=\frac{\dfrac{2\sqrt{x-3}\cdot 2\sqrt{x-3}-(2x+1)}{2\sqrt{x-3}}}{x-3}=$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{x-3}\right)^2-(2x+1)}{(x-3)\cdot 2\sqrt{x-3}}=\frac{4(x-3)-2x-1}{(x-3)\cdot 2\sqrt{x-3}}=\frac{4x-12-2x-1}{2\sqrt{(x-3)^3}}=\frac{2x-13}{2\sqrt{(x-3)^3}}$$

xvii. $y=\sqrt{\dfrac{3x+1}{3x-1}}$

Aplicamos la regla de la cadena y a continuación la del cociente.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x+1}{3x-1}}}\cdot\frac{3\cdot(3x-1)-(3x+1)\cdot 3}{(3x-1)^2}=\frac{9x-3-9x-3}{2(3x-1)^2\sqrt{\dfrac{3x+1}{3x-1}}}=\frac{-6}{2(3x-1)^2\sqrt{\dfrac{3x+1}{3x-1}}}=\frac{-3}{(3x-1)^2\sqrt{\dfrac{3x+1}{3x-1}}}$$

xviii. $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$

La forma más sencilla de derivar esta función es expresarla como un polinomio con coeficientes fraccionarios y exponentes negativos.

$$y=\frac{1}{3}x+3x^{-1}$$

$$y'=\frac{1}{3}\cdot 1+3\cdot(-1)x^{-2}=\frac{1}{3}-\frac{3}{x^2}=\frac{x^2-9}{3x^2}$$

xix. $y = x^2 \operatorname{Ln} x + x \operatorname{Ln} x + 1$

Aplicamos las reglas del producto y de la suma

$$y' = \underbrace{2x \cdot \operatorname{Ln} x + x^2 \cdot \frac{1}{x}}_{\left(x^2 \operatorname{Ln} x\right)'} + \underbrace{1 \cdot \operatorname{Ln} x + x \cdot \frac{1}{x}}_{\left(x \cdot \operatorname{Ln} x\right)'} + 0 = 2x \operatorname{Ln} x + x + \operatorname{Ln} x + 1 = x + 1 + (2x+1)\operatorname{Ln} x$$

xx. $y = x^4 + 4^x + 4^4$

$$y' = 4x^3 + 4^x \cdot \operatorname{Ln} 4 + 0 = 4x^3 + 4^x \cdot \operatorname{Ln} 4$$

xxi. $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(1+\sqrt{x}\right) - \left(1-\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left[\left(1+\sqrt{x}\right) + \left(1-\sqrt{x}\right)\right]}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-\left[1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}\right]}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{-2}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

xxii. $y = \operatorname{sen} x^2 + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x^2$

Aplicamos la regla de la cadena teniendo en cuenta el orden de composición

$$y = \operatorname{sen}\left(x^2\right) + (\operatorname{sen} x)^2 + \left(\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right)^2$$

$$y' = \cos x^2 \cdot 2x + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x + 2 \operatorname{sen} x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos\left(x^2\right) + \operatorname{sen}(2x) + 2x^2 \operatorname{sen}\left(2x^2\right)$$

xxiii. $y = \operatorname{tg}^3(\cos^2 x) - \operatorname{cotg}^4(\operatorname{sen}^3 x)$

Aplicamos la regla de la cadena teniendo en cuenta el orden de composición

$$y = \left(\operatorname{tg}(\cos x)^2\right)^3 + \left(\operatorname{cotg}(\operatorname{sen} x)^3\right)^4$$

$$y' = 3\operatorname{tg}^2\left(\cos^2 x\right) \cdot \frac{1}{\cos\left(\cos^2 x\right)} \cdot 2\cos x \cdot (-\operatorname{sen} x) + 4\operatorname{cotg}^3\left(\operatorname{sen}^3 x\right) \cdot \frac{-1}{\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{sen}^3 x\right)} \cdot 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$$

xxiv. $y = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^8$

Si se tiene en cuenta que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow y = 1^8 = 1$: $y' = 0$

Si no nos damos cuenta, habrá que aplicar la regla de la cadena.

$$y' = 8\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right)^7 \cdot \left(2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + 2\cos x \cdot (-\operatorname{sen} x)\right) =$$

$$= 8\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right)^7 \cdot \left(2\operatorname{sen} x \cdot \cos x - 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x\right) = 8\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right)^7 \cdot 0 = 0$$

xxv. $y = 3^{\sqrt{\cos x}}$

Aplicamos la regla de la cadena.

$$y' = 3^{\sqrt{\cos x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\operatorname{sen} x) = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot 3^{\sqrt{\cos x}}}{2\sqrt{\cos x}}$$

xxvi. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

$$y' = \frac{(\cos x + (-\operatorname{sen} x)) \cdot (\operatorname{sen} x - \cos x) - (\operatorname{sen} x + \cos x) \cdot (\cos x - (-\operatorname{sen} x))}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x) \cdot (\operatorname{sen} x - \cos x) - (\operatorname{sen} x + \cos x) \cdot (\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} =$$

$$=\frac{(\cos x-\operatorname{sen} x)\cdot(\operatorname{sen} x-\cos x)-(\operatorname{sen} x+\cos x)\cdot(\cos x+\operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x-\cos x)^2}=$$

En el primer binomio del numerador se puede sacar factor común del signo −.

$$=\frac{-(\operatorname{sen} x-\cos x)\cdot(\operatorname{sen} x-\cos x)-(\operatorname{sen} x+\cos x)\cdot(\cos x+\operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x-\cos x)^2}=\frac{-(\operatorname{sen} x-\cos x)^2-(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}{(\operatorname{sen} x-\cos x)^2}=$$

$$=\frac{-\left(\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen} x\cos x+\cos^2 x\right)-\left(\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x+\cos^2 x\right)}{(\operatorname{sen} x-\cos x)^2}=\frac{-(1-\operatorname{sen} 2x)-(1+\operatorname{sen} 2x)}{(\operatorname{sen} x-\cos x)^2}=$$

$$=\frac{-1+\operatorname{sen} 2x-1-\operatorname{sen} 2x}{(\operatorname{sen} x-\cos x)^2}=\frac{-2}{(\operatorname{sen} x-\cos x)^2}$$

xxvii. $y=x^3\cdot e^x$

$$y'=3x^2\cdot e^x+x^3\cdot e^x=\left(3x^2+x^3\right)\cdot e^x$$

En las derivadas del tipo polinomio por exponencial, es conveniente sacar factor común de la exponencial, dejando la expresión de la derivada con la misma estructura que la función.

xxviii. $y=\dfrac{e^x}{x-1}$

$$y'=\frac{e^x\cdot(x-1)-e^x\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{e^x\cdot((x-1)-1)}{(x-1)^2}=\frac{e^x\cdot(x-2)}{(x-1)^2}$$

xxix. $y=\dfrac{xe^x}{(x+2)^2}$

$$y'=\frac{\left(1\cdot e^x+x\cdot e^x\right)\cdot(x+2)^2+xe^x\cdot 2(x+2)\cdot 1}{\left((x+2)^2\right)^2}=\frac{(x+2)e^x\left((1+x)\cdot(x+2)+2x\right)}{(x+2)^4}=\frac{e^x\left(x^2+3x+2+2x\right)}{(x+2)^3}=$$

$$=\frac{e^x\left(x^2+5x+2\right)}{(x+2)^3}$$

xxx. $y=\dfrac{x^2-1}{e^x}$

$$y'=\frac{2x\cdot e^x-\left(x^2-1\right)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x\cdot\left(2x-\left(x^2-1\right)\right)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{2x-x^2+1}{e^x}=\frac{-x^2+2x+1}{e^x}$$

xxxi. $y=(x+e^x)\operatorname{Ln} x$

$$y'=\left(1+e^x\right)\cdot\operatorname{Ln} x+\left(x+e^x\right)\cdot\frac{1}{x}=\left(1+e^x\right)\operatorname{Ln} x+\frac{x+e^x}{x}$$

xxxii. $y=e^{2x}\cdot\operatorname{tg} x^2$

$$y=e^{2x}\cdot 2\cdot\operatorname{tg} x^2+e^{2x}\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2 x^2\right)\cdot 2x=2e^{2x}\cdot\left(\operatorname{tg} x^2+x\left(1+\operatorname{tg}^2 x^2\right)\right)$$

xxxiii. $y=e^{\operatorname{tg} 2x}$

$$y'=e^{\operatorname{tg} 2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{e^{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 x}$$

xxxiv. $y = x^3 + 37^x + \text{Log}_3 x$

$$y' = 3x^2 + 3^x \cdot \text{Ln}\,3 + \frac{1}{x \cdot \text{Ln}\,3}$$

xxxv. $y = 7^{x^2+1} \cdot \text{lg}_7(2x+1)$

$$y' = 7^{x^2+1} \cdot 2x \cdot \text{Ln}\,7 \cdot \log_7(2x+1) + 7^{x^2+1} \cdot \frac{1}{(2x+1)\cdot \text{Ln}\,7} \cdot 2 = 7^{x^2+1} \cdot 2\left(\text{Ln}\,7^x \cdot \log_7(2x+1) + \frac{1}{(2x+1)\cdot \text{Ln}\,7}\right)$$

xxxvi. $y = \dfrac{\ln x^2}{3^{x^2+1}}$

Se aplican las propiedades de los logaritmos para simplificar la derivada.

$$y = \frac{\text{Ln}\,x^2}{3^{x^2+1}} = \frac{2\,\text{Ln}\,x}{3^{x^2+1}}$$

$$y' = \frac{\frac{2}{x} \cdot 3^{x^2+1} + 2\,\text{Ln}\,x \cdot 3^{x^2+1} \cdot 2x \cdot \text{Ln}\,3}{\left(3^{x^2+1}\right)^2} = \frac{3^{x^2+1}\left(\frac{2}{x} + 4x\,\text{Ln}\,x \cdot \text{Ln}\,3\right)}{\left(3^{x^2+1}\right)^2} = \frac{\frac{2}{x} + 4x\,\text{Ln}\,x \cdot \text{Ln}\,3}{3^{x^2+1}} =$$

$$= \frac{2 + 4x^2\,\text{Ln}\,x \cdot \text{Ln}\,3}{x \cdot 3^{x^2+1}}$$

xxxvii. $y = \cos^4 \sqrt{x}$

Función compuesta: $y = \left(\cos\left(\sqrt{x}\right)\right)^4$. Se aplica la regla de la cadena

$$y' = 4\cos^3 \sqrt{x} \cdot \left(-\text{sen}\,\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

xxxviii. $y = \left(\sqrt{x}\right)^{x^2}$

Derivada logarítmica.

$$y = \left(\sqrt{x}\right)^{x^2} = \left(x^{1/2}\right)^{x^2} = x^{x^2/2}$$

Se toman logaritmos a ambos lados de la igualdad, y se baja la función del exponente del logaritmo según las propiedades de estos.

$$\text{Ln}\,y = \text{Ln}\,x^{x^2/2} \qquad \text{Ln}\,y = \frac{x^2}{2}\text{Ln}\,x$$

Derivada implícita.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2x}{2} \cdot \text{Ln}\,x + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = x\,\text{Ln}\,x + \frac{x}{2}$$

Se despeja y', sustituyendo y por su expresión

$$y' = y \cdot \left(x\,\text{Ln}\,x + \frac{x}{2}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^{x^2} \cdot \left(x\,\text{Ln}\,x + \frac{x}{2}\right)$$

xxxix. $y = \cos^2 x + e^{\text{sen}\,x}$

$$y' = 2\cos x \cdot (-\text{sen}\,x) + e^{\text{sen}\,x} \cdot \cos x = \cos x\left(e^{\text{sen}\,x} - 2\text{sen}\,x\right)$$

xl. $y = \frac{1}{3} \cdot tg^3 x - tg\, x + x$

$$y' = \frac{1}{3} 3tg^2 x \cdot (1 + tg^2 x) - (1 + tg^2 x) + 1 = g^2 x + tg^4 x - 1 - tg^2 x + 1 = tg^4 x$$

xli. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + Ln\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$

Antes de derivar es conveniente aplicar las propiedades de los logaritmos.

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{1/2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Derivada:

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2+1} + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1} + x^2}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 + 1 + x^2}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+2}{2\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{2(x^2+1)}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}$$

xlii. $y = Ln\sqrt{sen\, 2x}$

$$y = Ln\sqrt{sen\, 2x} = Ln(sen\, x)^{1/2} = \frac{1}{2} Ln(sen\, x)$$

Derivada:

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{sen\, x} \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{sen\, x} = \frac{1}{2} \cdot cotg\, x$$

xliii. $y = Ln\sqrt{\frac{1 + sen\, x}{1 - sen\, x}}$

$$y = Ln\sqrt{\frac{1 + sen\, x}{1 - sen\, x}} = Ln\left(\frac{1 + sen\, x}{1 - sen\, x}\right)^{1/2} = \frac{1}{2} Ln\frac{1 + sen\, x}{1 - sen\, x} = \frac{1}{2}\left[Ln\,(1 + sen\, x) - Ln\,(1 - sen\, x)\right]$$

Derivada:

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 + sen\, x} \cdot \cos x - \frac{1}{1 - sen\, x} \cdot (-\cos x)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{1 + sen\, x} + \frac{\cos x}{1 - sen\, x}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\cos x \cdot (1 - sen\, x) + \cos x \cdot (1 + sen\, x)}{(1 + sen\, x) \cdot (1 - sen\, x)} = \frac{1}{2} \frac{\cos x - \cos x \cdot sen\, x + \cos x + \cos x \cdot sen\, x}{(1 + sen\, x) \cdot (1 - sen\, x)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2\cos x}{1 - sen^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

xliv. $y = x \operatorname{arsen} x + \sqrt{1-x^2}$

$$y' = 1\cdot \operatorname{arsen} x + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = \operatorname{arsen} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arsen} x$$

xlv. $y = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{(1-x)^2}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \frac{2}{1^2-2x+x^2+1^2-2x+x^2} = \frac{2}{2+2x^2} = \frac{2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

xlvi. $y = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}$

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^2}\cdot\frac{\cos x\cdot(1+\operatorname{sen} x)-\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2+(\operatorname{sen} x)^2}{(1+\operatorname{sen} x)^2}}\cdot\frac{\cos x+\cos x\cdot\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2} = \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2+(\operatorname{sen} x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x+1}$$

xlvii. $y = \operatorname{arcsen}\frac{x}{x+1}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}}\cdot\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(x+1)^2-x^2}{(x+1)^2}}}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{(x+1)^2-x^2}}{(x+1)}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+1^2-x^2}}\cdot\frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1^2}}$$

xlviii. $x^2+y^2-3x+4y-5=0$

Derivada implícita.

$$2x+2y\cdot y'-3+4y'-0=0$$

La derivada de la función se obtiene despejando y'.

$$2y\cdot y'+4y' = 3-2x$$
$$y'\cdot(2y+4) = 3-2x$$
$$y' = \frac{3-2x}{2y+4}$$

xlix. $\operatorname{sen} x+\cos y = \frac{1}{2}$

Derivada implícita.

$$\cos x-\operatorname{sen} y\cdot y' = 0$$
$$\operatorname{sen} y\cdot y' = \cos x$$
$$y' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} y}$$